

Федеральное агентство связи
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

А.И. Фалько

АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ

Монография СибГУТИ

Новосибирск
2015

Утверждено Редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензенты: д-р техн.наук *А.В. Киселев*, д-р техн. наук *Ю.А. Пальчун*

Фалько А.И. Адаптивный прием сигналов : Монография СибГУТИ / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики. – Новосибирск, 2015. – 328 с.

В монографии рассматриваются вопросы синтеза и анализа адаптивных алгоритмов одиночного и разнесенного приема сигналов в каналах с многолучевостью и комплексным воздействием совокупности флуктуационных и узкополосных помех с неполной априорной информацией. Адаптация рассматривается как средство преодоления априорной неопределенности о свойствах сигналов, каналов и помех.

Содержание монографии (кроме обзорных параграфов 1.1 и 6.1) состоит из оригинальных результатов исследований автора.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов, научных работников и инженеров-исследователей, занимающихся исследованием и разработкой телекоммуникационных систем.

ISBN 978–5–91434–024–4

Кафедра радиотехнических устройств
Илл. – 49; список лит. – 321 назв.

© Фалько А.И., 2015
© Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список принятых сокращений	6
Основные обозначения	7
Предисловие	10
1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ БОРЬБЫ С УЗКОПОЛОСНЫМИ ПОМЕХАМИ	11
1.1. Основные направления исследований	11
1.2. Модель сигналов и помех	17
1.3. Метод синтеза и анализа	22
2. ОДИНОЧНЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ	31
2.1. Вводные замечания	31
2.2. Адаптивные алгоритмы одиночного приема с обучением по узкополосным помехам	32
2.3. Состоятельность адаптивных алгоритмов одиночного приема с обучением по узкополосным помехам	43
2.4. Помехоустойчивость одиночного когерентного приема с обучением по помехам	45
Прием незамирающих сигналов	45
Прием замирающих сигналов	59
2.5. Помехоустойчивость одиночного некогерентного приема с обучением по помехам	65
Прием незамирающих сигналов	65
Прием замирающих сигналов	71
2.6. Адаптивные алгоритмы одиночного приема при марковских изменениях параметров узкополосных помех	75
2.7. Помехоустойчивость приема при марковских изменениях параметров узкополосных помех	81
Когерентный прием	81
Некогерентный прием	86
2.8. Вопросы реализации решающих правил приема с обучением по узкополосным помехам	88
2.9. Адаптивный одиночный прием при произвольных изменениях параметров узкополосных помех	107
3. АДАПТИВНЫЙ ОДИНОЧНЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО СИГНАЛУ И ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ	123
3.1. Вводные замечания	123
3.2. Алгоритмы приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам	123
3.3. Вопросы реализации алгоритмов приема с совместным обучением по сигналу и помехам	131
Противоположные сигналы	131

Ортогональные в усиленном смысле сигналы	135
3.4. Помехоустойчивость адаптивного приема при совместном обучении по сигналу и помехам	137
4. АДАПТИВНЫЙ РАЗНЕСЕННЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ	146
4.1. Вводные замечания	146
4.2. Алгоритмы разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам	147
Когерентный разнесенный прием	148
Некогерентный разнесенный прием с когерентным сложением сигналов	154
Некогерентный разнесенный прием	158
4.3. Помехоустойчивость когерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам	160
4.4. Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов	172
Прием незамирающих сигналов	172
Прием замирающих сигналов	175
4.5. Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам	183
5. АДАПТИВНЫЙ РАЗНЕСЕННЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО СИГНАЛУ И ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ	192
5.1. Вводные замечания	192
5.2. Алгоритмы приема при полной разделимости сигналов	192
Апостериорное распределение параметров сигнала	194
Алгоритм приема при смешанном обучении по узкополосным помехам	197
Алгоритм приема при самообучении по узкополосным помехам	198
Алгоритм приема при неразличимых структурах сигнала и узкополосных помех	199
Алгоритм приема при стохастических сигналах и узкополосных помехам	200
5.3. Помехоустойчивость адаптивного разнесенного приема при совместном обучении по сигналу и по узкополосным помехам	205
5.4. Адаптивный прием по параллельным каналам при неполной разделимости сигналов	214
5.5. Прием многочастотных сигналов в многолучевых каналах	221
5.6. Прием многочастотных сигналов с относительной фазовой манипуляцией в многолучевых каналах	235
5.7. Оценка частоты узкополосных помех	242
6. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ С УЗКОПОЛОСНЫМИ ПОМЕХАМИ	246
6.1. Методы спектрального оценивания помеховой обстановки	246

6.2. Синтез цифровых алгоритмов приема сигналов в каналах с узкополосными помехами.....	266
6.3. Анализ помехоустойчивости цифровых алгоритмов	273
7. АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ С МНОГОЛУЧЕВЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ РАДИОВОЛН.....	278
7.1. Синтез адаптивных алгоритмов приема широкополосных сигналов с нулевой зоной корреляции в мобильных системах ММО	278
7.2. Анализ помехоустойчивости приема широкополосных сигналов в многолучевых каналах	285
7.3. Адаптивный разнесенный прием сигналов OFDM	294
Литература.....	307

Список принятых сокращений

- АЛУ – арифметическое логическое устройство.
АР – авторегрессионный (процесс).
АРСС – авторегрессионный со скользящим средним (процесс).
АЦП – аналогово-цифровой преобразователь.
АЦФ – адаптивный цифровой фильтр.
БПФ – быстрое преобразование Фурье.
ГАРС – градиентный алгоритм для решетчатых структур.
КИХ – фильтр с конечной импульсной характеристикой.
КФ – корреляционная функция.
МНКРС – модифицированный алгоритм наименьших квадратов для решетчатых структур.
НКРС – алгоритм наименьших квадратов для решетчатых структур.
НСК – алгоритм наименьших средних квадратов.
ОЗУ – оперативное запоминающее устройство.
ОП – отношение правдоподобия.
ПЗУ – постоянное запоминающее устройство.
РНК – рекуррентный алгоритм наименьших квадратов.
РФ – решетчатый фильтр.
СПМ – спектральная плотность мощности.
УП – узкополосная помеха.
ЦОС – цифровая обработка сигналов.

Основные обозначения

A – пороговый уровень.

$A_{n,i}$ – коэффициенты фильтра предсказания.

a_k, θ_k – весовые коэффициенты фильтров.

B_r – коэффициент, определяющий пороговый уровень.

$B(t, u)$ – корреляционная функция.

C_{2Q-1}^Q – число сочетаний из $2Q-1$ элементов по Q .

c_q, d_q – параметры распределения.

$D(\cdot)$ – дисперсия.

E_c, E_r – энергия элемента r -го сигнала.

E_{Π} – энергия помехи на длительности элемента сигнала.

F_r – условная полоса частот передаваемого сигнала.

F_{Π} – условная полоса частот узкополосной помехи (УП).

f_{cp} – средняя частота сигнала.

f_{Π} – средняя частота помехи.

$\mathcal{F}(\cdot)$ – функционал отношения правдоподобия.

$G(\cdot)$ – область интегрирования.

G_{ri} – комплексный коэффициент взаимного различия r -го сигнала и i -ой УП.

g_{ri}^2 – коэффициент взаимной корреляции r -го сигнала и i -ой УП.

$G(\cdot)$ – импульсная характеристика фильтра.

$H(\cdot)$ – импульсная характеристика «обеливающего» фильтра.

h^2 – отношение энергии элемента сигнала к спектральной плотности мощности шума.

h_{Π}^2 – отношение энергии УП на длительности элемента сигнала к спектральной плотности шума.

$\overline{h^2}, \overline{h_{\Pi}^2}$ – средние значения (математические ожидания) соответственно h^2, h_{Π}^2 при замираниях.

I – единичная матрица.

J – матрица квадратичной формы.

K – ковариационная матрица.

K_i – коэффициент отражения.

M – объем обучающей выборки сигнала.

m – параметр в распределении Накагами.

$m_{\text{СП}i}$ – математические ожидания квадратурных компонент оценок УП.

N – объем обучающей выборки УП.

$N_{\text{П}}$ – число УП, действующих на принимаемый сигнал.

P_r – мощность передаваемого r -го сигнала.

$P_{\text{П}}$ – мощность передаваемой УП.

p – вероятность ошибки при приеме элемента сигнала.

Q – число ветвей при разнесенном приеме.

$R_c(t_1, t_2), R_{\text{П}}(t_1, t_2)$ – коэффициенты корреляции квадратурных составляющих соответственно сигнала и УП.

$r_c, r_{\text{П}}$ – коэффициенты, характеризующие скорость изменения параметров соответственно сигнала и УП.

T – длительность элемента сигнала.

$W(x)$ – плотность вероятности случайной величин x .

$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1\dots N}$ – обучающая выборка УП.

$\mathbf{Z}_r(t)$ – переданный вариант сигнала.

$\mathbf{Z}'(t)$ – принятый сигнал.

$\mathbf{Z}_{\text{П}}(t)$ – функция, определяющая форму УП.

$\gamma(t, \theta_{\text{П}})$ – совокупность УП.

$\varepsilon_r(n)$ – ошибка фильтрации.

$\zeta_r(n)$ – порождающий процесс.

$\theta, \theta_{\text{П}}$ – параметры соответственно сигнала и УП.

Λ_{rl} – отношение правдоподобия для r -го варианта сигнала относительно l -го.

λ – собственные числа матрицы.

$\mu_c, \mu_s, \mu_{\text{СП}}, \mu_{\text{П}}$ – квадратурные (ортогональные) составляющие коэффициентов передачи канала соответственно для сигнала и УП.

ν^2 – спектральная плотность мощности белого шума.

$\xi(t)$ – реализация флуктуационной помехи, аппроксимируемая белым гауссовским шумом.

ρ – коэффициент взаимной корреляции вариантов сигнала.

σ^2 – дисперсия шумов.

τ – интервал корреляции.

φ, ψ – начальная фаза.

ω – круговая частота.

$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – интеграл вероятности (функция Крампа).

Прямая черта над буквой или формулой означает статистическое усреднение.

Значок $\hat{\mu}$ над символом означает оценку.

Значок \tilde{Z} над символом означает преобразование Гильберта.

T – знак транспонирования матрицы.

* означает комплексно-сопряженную величину.

+ означает комплексно-сопряженную операцию транспонирования матрицы.

Посвящается
основоположнику
относительных методов модуляции
профессору Николаю Тимофеевичу Петровичу

Предисловие

Проблема построения помехоустойчивых систем всегда была одной из важнейших, и ее значение существенно возросло в связи с развитием средств связи с подвижными объектами и особенно в связи с большими успехами в разработке и использовании цифровых технологий при реализации методов обработки сигналов.

Фундаментальные основы теории помехоустойчивости заложил ее основатель В.А. Котельников. Дальнейшее развитие теория получила в трудах А.А. Харкевича, В.И. Сифорова, Д. Мидлтона, В.И. Тихонова, Б.Р. Левина, Л.М. Финка, А.Г. Зюко, Н.Т. Петровича, Н.Л. Теплова, Т. Кайлата, Н.П. Хворостенко, А.А. Сикарева, Ю.Т. Сосулина, Д.Д. Кловского, Л.Е. Варакина и многих других ученых.

В настоящее время развитие теории идет по пути синтеза и анализа адаптивных систем в условиях неполной априорной информации о реальных помехах и реальных каналах.

Целью данной монографии является дальнейшее развитие теории адаптивного одиночного и разнесенного приема сигналов применительно к каналам с многолучевым распространением и комплексным воздействием мультипликативных и аддитивных помех, когда последние можно представить совокупностью флуктуационных и узкополосных (сосредоточенных по спектру) помех с неполной априорной информацией.

Исследуются вопросы применения широкополосных сигналов с нулевой зоной корреляции (ZCZ – CDMA) в мобильных системах ММО, а также адаптация по пилотным сигналам в системах с OFDM.

Адаптация рассматривается как достаточно универсальное средство преодоления априорной неопределенности о свойствах сигналов, каналов и помех.

1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ БОРЬБЫ С УЗКОПОЛОСНЫМИ ПОМЕХАМИ

1.1. Основные направления исследований

Большое многообразие работ по борьбе с узкополосными помехами можно разделить на два класса. К первому классу относятся исследования по анализу воздействия узкополосных помех на системы, построенные оптимально для каналов с белым шумом. Таких работ много, например [43, 64, 76, 126, 139, 160, 172, 205]. Исследования проводились для различных статистических ситуаций по отношению к сигналам и узкополосным помехам. Практическое значение этих работ ограничивается каналами, в которых интенсивность узкополосных помех мала по сравнению с интенсивностью флуктуационной помехи. Ко второму классу относятся работы по синтезу и анализу оптимальных или близких к оптимальным (субоптимальных) решающих схем в каналах с узкополосными помехами. Для рассмотрения основных особенностей современных направлений исследований представим принятую смесь сигнала с помехами на входе приемника в следующем виде:

$$\mathcal{Z}'(t) = \mu \mathcal{Z}_r(t, \psi) + \sum_{i=1}^{N_p} \gamma_i(t) + \xi(t), \quad t \in T, \quad (1.1.1)$$

где $\mathcal{Z}_r(t)$ – детерминированная, интегрируемая в квадрате функция, определяющая структуру передаваемого варианта сигнала; $r = 1, \dots, m$, m – основание кода; μ и ψ – коэффициент передачи и начальная фаза высокочастотного заполнения сигнала; T – длительность элемента сигнала; $\gamma_i(t)$ – реализация i -й узкополосной помехи; N_p – число воздействующих узкополосных помех; $\xi(t)$ – реализация аддитивной флуктуационной помехи, аппроксимируемая белым гауссовым шумом.

Большинство известных методов исследования базируется на предположении, что совокупность узкополосных помех $\sum \gamma_i(t)$ относится к пространству реализаций шума. При этом используются различные аппроксимации, отражающие реальную ситуацию с той или иной степенью приближения. Наиболее развиты в этом направлении методы, при которых процесс $\sum \gamma_i(t)$ можно полагать нормальным с теми или иными корреляционными свойствами. В ряде работ, например [102, гл. 8; 113], анализ воздействия узкополосных помех ограничен рамками корреляционной теории (спектральных преобразований совокупности помех в тракте приемника). Естественно, что при этом остается открытым вопрос как о помехоустойчивости анализируемых устройств, так и о построении оптимальных решающих схем в различных статистических ситуациях.

В настоящее время большое развитие получили методы синтеза оптимальных решающих правил на базе аппроксимации процесса окрашенным гауссовым шумом [88, 110, 161, 165, 168–171, 198, 204]. При этом приемное устройство содержит обычную решающую схему, оптимальную для белого гауссового шума, на которую принимаемый сигнал подается после фильтра, обеляющего узкополосные помехи. На практике большее распространение получили субоптимальные способы борьбы с узкополосными помехами, незначительно уступающие оптимальному, основанные на вырезании части спектра сигнала вместе с помехой [23, 62, 63, 72, 115, 145, 167, 198 и др.]. Синтез и анализ оптимальных алгоритмов в каналах с флуктуационными и узкополосными помехами, когда каждая из них аппроксимируется квазигармоническим колебанием с нормальным распределением мгновенных значений, проведен в работе [4].

Однако в ряде случаев сумма воздействующих узкополосных помех не может быть аппроксимирована нормальным случайным процессом. Это имеет место, например, когда число узкополосных помех относительно невелико ($N_{\text{п}} \leq 5 \div 6$) и не выполняются условия центральной предельной теоремы как в силу малой величины $N_{\text{п}}$, так и из-за отличия от нормального закона статистических свойств мгновенных значений отдельных помех (например, в случае отсутствия их замираний). Кроме того, в реальных условиях на приемное устройство, как правило, воздействуют узкополосные помехи, резко выделяющиеся на фоне их совокупности. Мощности таких помех значительно превышают мощности других помех и соизмеримы с мощностью полезного сигнала, а спектры их могут частично или полностью совпадать со спектром сигнала. В этом случае совокупность $\varkappa(t) = \sum \gamma_i(t) + \xi(t)$ представляет собой по существу негауссов шум. Следует отметить, что в настоящее время не существует единой методики анализа такой совокупности флуктуационных шумов и узкополосных помех. При этом наиболее четко выделяются следующие направления исследований [106].

Метод многомерной плотности вероятности. Этот метод основан на использовании негауссова случайного процесса. Рассматривался в работах [6, 7, 124] для случая, когда многомерная плотность есть произведение одинаковых одномерных плотностей вероятности. В этих работах показано, что в общем случае приемник состоит из бесконечного числа каналов, каждый из которых содержит последовательно соединенные безынерционный, а в случае коррелированных выборок, инерционный нелинейный четырехполосник с амплитудной характеристикой, определяемой плотностью вероятности помехи, и оптимального линейного фильтра, согласованного с соответствующей степенью полезного сигнала. Выходы всех каналов суммируются, причем вклад, вносимый каждым каналом, уменьшается с ростом его номера.

Анализ показывает, что отыскание решений на основе рассматриваемого метода в общем случае является довольно неопределенным, т. к. неизвестно, каким образом получить многомерную плотность вероятности в каждой конкретной статистической ситуации работы систем связи.

Использование марковских процессов. Для аппроксимации совокупности негауссовых помех могут быть использованы марковские процессы того или иного порядка. Основы этого метода заложены работами Р.Л. Стратоновича в конце 50-х гг. XX в. [150]. В настоящее время метод марковских процессов является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов статистической радиотехники и широко используется. При помощи этой теории удается определить структуру оптимальных устройств, однако оценка качества их работы сопряжена с преодолением больших математических трудностей. Это приводит к необходимости применять упрощенные методы исследования, что, в свою очередь, является причиной противоречивых оценок качества работы синтезированных приемников. В работе [33] дается оценка точности качества работы с использованием марковских моделей при синтезе и анализе систем обработки информации, вводятся информационные меры точности модели, связанные с критерием качества систем.

Марковский характер помех использовался также в работах [148, 152, 154, 163, 218 и др.]. Применение теории марковских процессов к реальным радиоканалам требует дальнейшей разработки ряда вопросов точности аппроксимации с учетом распределения помех. К особенностям метода следует отнести громоздкость получающихся в ряде случаев решений в алгоритмах оптимальных систем. Кроме того, при таком подходе затруднены, а иногда и остаются открытыми вопросы вычисления помехоустойчивости систем передачи дискретной информации.

Метод функционального преобразования белого шума. Метод функционального (детерминированного и детерминированно-обратного) преобразования белого шума, приводящего к исследуемому, в частности, негауссовому процессу, развит в работах Кайлата [65, 215, 216] и В.П. Кузнецова [92, 93]. Достоинство функционального преобразования белого шума (если оно существует) заключается в том, что задачи статистических решений, основанных на наблюдении негауссова процесса, могут быть заменены более простыми задачами, которые исходят из наблюдения белого шума. Следовательно, появляется возможность редуцировать некоторые из нерешенных до сих пор задач статистического синтеза к более простым, охватываемым классической теорией и тем самым расширить область применения последней. Применительно к каналам с узкополосными помехами данный метод в сочетании с другими был использован в работах [14, 174 и др.].

Метод полигауссовых представлений случайных процессов. Полигауссово представление совокупности узкополосных помех рассматривалось в работах [208 и др.]. Случайный процесс, описывающий результирующее колебание помех, рекомендуется определять как полигауссовый, если соответствующая этому процессу вероятностная мера π , в случае существования, соответствующая плотность вероятности может быть представлена смесями гауссовых. Полигауссово представление случайного процесса означает, что почти всякая реализация этого процесса рассматривается как реализация одного из конечного или счетного множества различных гауссовых процессов. Для синтеза оптимальных алгоритмов при полигауссовых мерах рекомендуется использовать обобщенный

метод максимального правдоподобия относительно сложных гипотез. Выбирая различные вероятностные меры, можно построить различные варианты отдельных алгоритмов. Из полученных алгоритмов следует, что оптимальный приемник при полигауссовых помехах является многоканальным сложным устройством, практическая реализация которого авторами [208] не рассматривается. Не анализируется также помехоустойчивость приемника при подобном представлении совокупности узкополосных помех.

Метод моментов Миддлтона. Метод моментов был предложен Д. Миддлтоном [110]. Основан на приближенной оценке соотношения сигнал/шум в системе путем определения нескольких моментов совокупности помех (обычно ограничиваются моментами четвертого–пятого порядка). Этот метод является развитием корреляционной теории на случай негауссовых процессов. Однако метод моментов не дает ответа на вопрос о вероятности ошибки и возможности синтеза оптимальной системы связи.

Системы с инвариантными свойствами. Для каналов с узкополосными помехами большой интерес представляют системы, у которых основные показатели работы инвариантны по отношению к характеристикам помех (сигналов) в определенных границах. Синтез таких систем может проводиться на основе методов непараметрической теории решений [96, 97], а также методов теории асимптотически эффективных или асимптотически оптимальных алгоритмов [18, 98, 101]. К непараметрическим относят алгоритмы, инвариантные (т. е. сохраняющие постоянное значение вероятности ошибки) по отношению к статистическим характеристикам одной из гипотез. Примером таких алгоритмов могут служить знаковые, ранговые алгоритмы. «Истинно» непараметрический алгоритм должен обладать инвариантностью по отношению ко всем проверяемым гипотезам. Если инвариантность имеет место в пределе, когда размер выборки неограниченно возрастает, то алгоритм называют асимптотически непараметрическим. Например, асимптотически эффективный ранговый алгоритм, обладающий интересными свойствами структурной устойчивости в изменяющихся условиях.

Следует иметь в виду, что при коррелированных помехах, какими являются узкополосные помехи, знаковые и ранговые алгоритмы перестают быть непараметрическими, т. е. свойство инвариантности у них теряется. Асимптотически оптимальные алгоритмы сохраняют свойство инвариантности и при коррелированных помехах.

Систематическое изложение методов непараметрической теории решений и методов асимптотически оптимальных алгоритмов дано в монографии Б.Р. Левина [101]. Заметим, что в настоящее время указанные методы приема развиваются в основном применительно к двухальтернативным задачам (например, обнаружение сигналов в шумах). Подобные задачи характерны для радиолокации, а не радиосвязи, где зачастую приходится иметь дело со случаями многоальтернативных задач. При использовании названных алгоритмов для целей радиосвязи существенными являются вопросы реализации таких алгоритмов. Важными являются также вопросы по оценке скорости сходимости асимптотически непараметрических алгоритмов к оптимальным, без решения которых невозможны

какие-либо суждения о целесообразности практического использования таких алгоритмов в каналах с узкополосными помехами.

С других позиций вопросы инвариантности рассматриваются в работах [9, 116]. В частности, в работе [9] рассмотрены вопросы построения систем связи на основе использования корреляционно-структурных свойств сигнала и сосредоточенных помех. Такие системы позволяют в ряде случаев эффективно бороться с узкополосными помехами, однако их возможности значительно уступают оптимальным.

Методы адаптивного приема сигналов. Хотя методы адаптивного приема сигналов также можно отнести в известном смысле к инвариантным, однако вследствие важности применения этих методов к каналам с узкополосными помехами, их рассмотрение вынесено в отдельный раздел.

Выше было отмечено, что современные системы передачи дискретных сообщений, как правило, функционируют в условиях весьма большого многообразия статистических и структурных свойств узкополосных помех, а нередко и в условиях недостаточной априорной информации об этих свойствах. Поэтому большой интерес представляют системы связи, которые могут обеспечить максимально эффективное обнаружение или различение сигналов в условиях помех с произвольным законом распределения. Такого рода системы должны быть адаптивными, т. е. обладающими способностью перестраивать свою структуру на основании оценки статистических характеристик узкополосных помех. Вопросам построения адаптивных систем посвящено много работ, например [101, гл. 4; 130, 155, 209]. Применительно к каналам с узкополосными помехами весьма интересными являются исследования В.Ф. Комаровича [81–85] по построению систем связи, которые автоматически переходят на новую, не занятую узкополосными помехами частоту в том случае, если интенсивность таких помех на данной рабочей частоте превышает некоторый допустимый уровень. Показано, что средний энергетический выигрыш сильно зависит от рассеяния превышения сигнал/помеха, т. е. от степени статистической неравномерности уровней помех на частотах группы, а также от количества используемых частот или суммарной ширины используемого спектра. К исследованиям этого направления относятся также работы [21, 39, 40, 44, 45, 49, 50, 68, 74, 75 и др.].

Метод пространственной компенсации помех при адаптивном приеме рассмотрен в [196 и др.]. Показана целесообразность использования пространственных компенсаторов помех, не требующих априорной информации о параметрах полезного сигнала и помех. Однако если помеха и сигнал приходят с одного направления, то компенсации помехи в подобных устройствах не происходит.

Большой интерес представляет направление синтеза адаптивных систем передачи дискретных сообщений, основанное на идеях эмпирического байесовского подхода [128–132]. Развитию идей этого направления применительно к каналам с узкополосными помехами посвящена данная монография [170–194, 305–312].

В ряде случаев при исследованиях влияния узкополосных помех более удобно относить $\sum \gamma_i(t)$ к пространству реализаций сигнала. Наиболее широко

это направление нашло отражение в работах Д.В. Агеева, Ю.Н. Бабанова, Н.А. Теплова [1, 10, 11, 160, 161] и ряде других. Однако в работах этих авторов анализ воздействия узкополосных помех ограничен преимущественно рамками корреляционной теории (спектральных преобразований), которая не предполагает использования статистических критериев оптимальности. В этих работах отсутствуют также расчеты вероятностей ошибок для различных статистических ситуаций.

Дальнейшее развитие представления совокупности узкополосных помех, отнесенных к пространству реализаций сигналов, на основе квазидетерминированных случайных процессов было достигнуто в работах А.А. Сикарева [138–143]. В названных работах разработан метод синтеза и анализа оптимальных алгоритмов приема в каналах с узкополосными помехами, базирующийся на сочетании принципов теории статистических решений и квазидетерминированной модели узкополосных помех. При этом основное внимание уделено исследованию случая, когда законы распределения неизвестных параметров помех (сигналов) заданы. Со всей очевидностью вытекает необходимость построения теории, в которой были бы сняты ограничения, вызванные необходимостью априорного знания указанных распределений.

Исходя из проблемы борьбы с узкополосными помехами с неполной априорной информацией, в данной монографии предпринята попытка решения следующих задач:

1. Разработать метод синтеза адаптивных алгоритмов приема сигналов при комплексном воздействии мультипликативных и аддитивных помех, когда последние можно представить в виде совокупности флуктуационных и узкополосных помех, в условиях неполной априорной информации о помехах. Метод должен предусматривать:

- возможность извлечения недостающей информации о помехах (сигналах) из принятой смеси совокупности сигналов и помех в процессе обучения;

- возможность построения решающих правил как с учетом структурных свойств сигналов и помех, так и без их учета, если это диктуется особенностями воздействующих помех.

2. Разработать метод анализа помехоустойчивости синтезированных алгоритмов в условиях воздействия аддитивных и мультипликативных помех при различных статистических ситуациях.

3. На основе предложенного метода разработать теорию одиночного и разнесенного адаптивного приема с обучением по узкополосным помехам в каналах с комплексным воздействием аддитивных и мультипликативных помех.

4. Разработать теорию адаптивного одиночного и разнесенного приема с совместным обучением по сигналу и по узкополосным помехам.

5. Разработать теорию адаптивного приема сигналов в условиях многолучевого распространения с адаптацией (обучением) по рабочим посылкам (в системах ZCZ – CDMA) и по опорным (пилотным) сигналам в системах OFDM.

1.2. Модель сигналов и помех

В настоящее время для описания принимаемых сигналов широко используются две основные математические модели: модель в виде квазидетерминированного случайного процесса и модель в виде стохастического процесса. При использовании модели квазидетерминированного случайного процесса предполагается известной временная функция, описывающая форму сигнала. Случайными являются отдельные параметры сигнала. У стохастического сигнала форма неопределенна. Такие сигналы могут быть описаны только статистически. В современных системах передачи дискретных сообщений в большинстве случаев используются различные модификации моделей квазидетерминированных случайных процессов.

В данной работе будем рассматривать в основном прием квазидетерминированных сигналов в условиях действия совокупности узкополосных (сосредоточенных по спектру) и флуктуационных помех. Для воздействующих на входе приемника узкополосных помех также будем использовать в основном модель квазидетерминированного случайного процесса. Такая модель основывается на том естественном факте, что по своему характеру узкополосные помехи в основном являются взаимными помехами одновременно работающих радиостанций. Мешающие сигналы имеют те же свойства, что и полезные сигналы. Они могут быть подвержены замираниям. Спектр их зачастую аналогичен спектру полезного сигнала или уже его. Поэтому и модели их могут иметь много общего.

В соответствии с определением квазидетерминированного случайного процесса [99] аппроксимируем каждую из воздействующих на вход приемника узкополосных помех следующим выражением:

$$\gamma_i(t) = \mathcal{Z}_{\Pi i}(t, \theta_{\Pi i}^{(1)}, \theta_{\Pi i}^{(2)}, \dots, \theta_{\Pi i}^{(D)}) = \mathcal{Z}_{\Pi i}(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi i}), \quad (1.2.1)$$

где $\mathcal{Z}_{\Pi i}(t)$ – детерминированная, интегрируемая в квадрате функция, определяющая структуру i -й узкополосной помехи;

$\boldsymbol{\theta}_{\Pi i} = \{\theta_{\Pi i}^{(d)}\}_{d=1, \dots, D}$ – множество случайных неизвестных параметров i -й помехи. Такими параметрами могут быть, например, амплитудный коэффициент передачи, начальная фаза высокочастотного заполнения, несущая частота и т. д.

Модель квазидетерминированной помехи (1.2.1) позволяет учитывать в наиболее общем виде как статистические, так и структурные особенности узкополосных помех в частотно-временной области. В дальнейшем будем предполагать ограниченность энергии воздействующей узкополосной помехи, т. е.

$$\int_T \mathcal{Z}_{\Pi i}^2(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi i}) dt < \infty. \quad (1.2.2)$$

С учетом модели (1.2.1) представим принятую смесь сигнала с помехами на входе приемника в форме:

$$\mathcal{Z}'(t) = \mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) + \xi(t), \quad t \in T, \quad (1.2.3)$$

где $\mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta})$ r -й вариант принимаемого сигнала; $\mathcal{Z}_r(t)$ – детерминированная интегрируемая в квадрате функция, определяющая структуру r -го сигнала; энергия принимаемого сигнала предполагается ограниченной

$$\int_T \mathcal{Z}_r^2(t, \boldsymbol{\theta}) dt < \infty. \quad (1.2.4)$$

$\boldsymbol{\theta} = \{\theta^{(j)}\}_{j=1,2,\dots,S}$ – множество случайных параметров сигнала; s – число слу-

чайных параметров сигнала $\mathcal{Z}_r(t); \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi i})$ – совокупность

узкополосных помех, действующих на сигнал; $\mathcal{Z}_{\Pi i}(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi i}) = \mathcal{Z}_{\Pi i}(t, \{\theta_{\Pi i}^{(d)}\})$ – i -я узкополосная помеха; N_{Π} – общее число помех, воздействующих на принимаемый сигнал; $\xi(t)$ – реализация аддитивной флуктуационной помехи, аппроксимируемая белым гауссовским шумом с нулевым средним и корреляционной функцией:

$$B(t-u) = \frac{v^2}{2} \delta(t-u). \quad (1.2.5)$$

В (1.2.5) $\delta(t-u)$ – дельта-функция.

Процесс $\xi(t)$ характеризуется n -мерной функцией распределения (функцией правдоподобия), которую при использовании независимых координат ξ_k можно записать в следующем виде:

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \xi_k^2\right]. \quad (1.2.6)$$

Здесь

$$\xi_k = \sqrt{\frac{2}{v^2}} \int_T \xi(t) \varphi_k(t) dt, \quad (1.2.7)$$

где $\{\varphi_k\}$ – любая система ортонормированных функций.

В силу принятых допущений функции $\mathcal{Z}_r(t), \gamma(t), \xi(t)$ и $\mathcal{Z}'(t)$ принадлежат пространству $L_2(T)$ и, следовательно, могут быть представлены разложе-

нием в ряд по системе $\{\varphi_k(t)\}$ [79]. При фиксированных θ и θ_{Π} имеют место расположения

$$\begin{aligned} \bar{Z}_r(t, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} Z_{rk}(\theta) \varphi_k(t), & \gamma(t, \theta_{\Pi}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\theta_{\Pi}) \varphi_k(t), \\ \xi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t), & Z'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Z'_k \varphi_k(t), \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{rk}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{v^2}} \int_T \bar{Z}_r(t, \theta) \varphi_k(t) dt, & Z'_k &= \sqrt{\frac{2}{v^2}} \int_T Z'(t) \varphi_k(t) dt, \\ \gamma_k(\theta_{\Pi}) &= \sqrt{\frac{2}{v^2}} \int_T \gamma(t, \theta_{\Pi}) \varphi_k(t) dt, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

ξ_K определяется (1.2.7).

В соответствии с (1.2.3), с учетом (1.2.8) и (1.2.9) функцию правдоподобия (1.2.6) для принятой реализации смеси сигнала с помехами можно записать в форме:

$$W_n(\xi_{1, \dots, \xi_n} / \bar{Z}_r, \theta, \theta_{\Pi}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(Z'_K - [Z_{rk}(\theta) + \gamma_k(\theta_{\Pi})] \right)^2 \right\}. \quad (1.2.10)$$

В дальнейшем будем использовать функционал отношения правдоподобия:

$$\mathcal{F}(Z' / \bar{Z}_r, \theta, \theta_{\Pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n(\xi_{1, \dots, \xi_n} / \bar{Z}_r, \theta, \theta_{\Pi})}{W_n(\xi_{1, \dots, \xi_n} / 0)}. \quad (1.2.11)$$

Определим его при фиксированных θ и θ_{Π} . В соответствии с (1.2.10) отношение функции правдоподобия принятой реализации смеси сигнала, совокупности узкополосных помех и шума к функции правдоподобия шума будет

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi_{1, \dots, \xi_n} / \bar{Z}_r, \theta, \theta_{\Pi}) &= \frac{W_n(\xi_{1, \dots, \xi_n} / \bar{Z}_r, \theta, \theta_{\Pi})}{W_n(\xi_{1, \dots, \xi_n} / 0)} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \left(Z'_k [Z_{rk}(\theta) + \gamma_k(\theta_{\Pi})] - \frac{1}{2} [Z_{rk}(\theta) + \gamma_k(\theta_{\Pi})]^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Подставим в (1.2.12) соотношения (1.2.9) и введем обозначение

$$V_n(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) = \sqrt{\frac{2}{V^2}} \sum_{k=1}^n [\mathcal{Z}_{rk}(\boldsymbol{\theta}) + \gamma_k(\boldsymbol{\theta}_\Pi)] \varphi_k(t), \quad (1.2.13)$$

получим

$$\mathcal{F}(\xi_1, \dots, \xi_n / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) = \exp \left\{ \int_T \left(\mathcal{Z}'(t) - \frac{1}{2} [\mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_\Pi)] \right) V_n(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) dt \right\}. \quad (1.2.14)$$

Если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\mathcal{Z}_{rk}(\boldsymbol{\theta}) + \gamma_k(\boldsymbol{\theta}_\Pi)]^2 < \infty, \quad (1.2.15)$$

то существует предел [100]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) = V(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi), \quad (1.2.16)$$

причем функция $V(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi)$ определяется из неоднородного интегрального уравнения

$$\int_T B(t, u) V(u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) du = \mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_\Pi), \quad t \in T. \quad (1.2.17)$$

При этих условиях отношение правдоподобия (1.2.14) сходится по вероятности к функционалу

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) = \exp \left\{ \int_T V(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) \left(\mathcal{Z}'(t) - \frac{1}{2} [\mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_\Pi)] \right) dt \right\}. \quad (1.2.18)$$

После подстановки (1.2.5) в (1.2.17) определим функцию $V(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi)$ в явном виде:

$$V(t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_\Pi) = \frac{2}{V^2} [\mathcal{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_\Pi)]. \quad (1.2.19)$$

С учетом (1.2.19) функционал отношения правдоподобия (1.2.18) окончательно примет вид:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Z}' / \mathbf{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \exp \left\{ \frac{2}{V^2} \int_T \mathbf{Z}'(t) [\mathbf{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})] dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{V^2} \int_T [\mathbf{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})]^2 dt \right\}. \quad (1.2.20)$$

Заметим, что в нашем случае условие (1.2.15) выполняется вследствие ограниченности энергии сигнала и узкополосных помех (1.2.2), (1.2.4), т. е. имеет место регулярный (по терминологии [48]) случай.

При разнесенном приеме результирующий сигнал представляет собой совокупность реализаций, принятых по Q ветвям

$$\mathbf{Z}'(t) = \{\mathbf{Z}'_q(t)\}_{q=1, \dots, Q} = \{\mathbf{Z}_{rq}(t, \boldsymbol{\theta}_{pq}) + \gamma_q(t, \boldsymbol{\theta}_q) + \xi_q(t)\}_{q=1, \dots, Q}; t \in T. \quad (1.2.21)$$

В дальнейшем будем считать, что шумы в ветвях разнесения независимы.

Нетрудно показать непосредственным обобщением формулы (1.2.20), что для этого случая функционал отношения правдоподобия можно представить в виде:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Z}' / \mathbf{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \exp \left\{ \sum_{q=1}^Q \frac{2}{V_q^2} \int_T \mathbf{Z}'_q(t) [\mathbf{Z}_{rq}(t, \boldsymbol{\theta}_q) + \gamma_q(t, \boldsymbol{\theta}_{pk})] dt - \right. \\ \left. - \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} \int_T [\mathbf{Z}_{rq}(t, \boldsymbol{\theta}_q) + \gamma_q(t, \boldsymbol{\theta}_{pq})]^2 dt \right\}. \quad (1.2.22)$$

Процессы $\mathbf{Z}_{rq}(t, \boldsymbol{\theta}_q), \gamma_q(t, \boldsymbol{\theta}_{pq})$ и $\xi_q(t)$ из (1.2.21), обусловленные в каждой ветви разнесения различными источниками, в большинстве рассматриваемых в дальнейшем случаев можно полагать статистически взаимно независимыми (если это не оговаривается особо).

Отметим, что рассматриваемые сигналы как узкополосных, так и широкополосных систем связи являются по своему характеру узкополосными процессами в том смысле, что они удовлетворяют соотношению:

$$F_r \ll f_{cp r}, \quad (1.2.23)$$

где $f_{cp r}$ – средняя частота сигнала; F_r – условная полоса частот, в которой сосредоточена основная энергия сигнала [198].

Применительно к узкополосным помехам условие (1.2.23) принимает вид: $F_{\text{ш}} \ll f_{\text{пср}} \cdot$ Вместе с тем форма передаваемых сигналов и узкополосных помех может быть достаточно сложной.

В заключение следует указать, что, хотя в работе в основном используется модель узкополосных помех (сигналов) в виде квазидетерминированного случайного процесса, для полноты картины в необходимых случаях проводится сопоставительный анализ с использованием стохастической модели. Подробнее стохастическая модель обсуждается при синтезе алгоритмов приема в соответствующих параграфах.

1.3. Метод синтеза и анализа

Статистическая формулировка задачи синтеза оптимальной системы состоит в определении наилучшего правила преобразования наблюдаемых данных $Z'(t)$ для принятия решения о переданном сигнале. В нашем случае задача регистрации в приемном устройстве r -го варианта полезного сигнала является, по существу, задачей различения его в присутствии мешающих сигналов и флуктуационных шумов.

Особенностью излагаемого здесь метода синтеза алгоритмов приема является развитие идей адаптивного (эмпирического) байесовского подхода применительно к задачам различения сигналов в каналах с флуктуационными и узкополосными помехами при использовании в основном квазидетерминированной модели узкополосных помех в сочетании с обучением в рамках теории статистических решений. При этом и метод оценки качества выбора решения в синтезированных алгоритмах приема естественно вытекает из теории статистических решений.

Синтез алгоритмов. На вход приемного устройства поступает смесь сигнала с узкополосными и флуктуационными помехами (1.2.3) или (1.2.21). Необходимо определить вид преобразований входного воздействия $Z'(t)$, обеспечивающий минимальные потери при принятии решения. В соответствии с критерием минимума среднего риска [100] оптимальное правило принятия решения о приеме r -го варианта сигнала определяется соотношением:

$$\Lambda_{r,l} > \Lambda_0, \quad r \neq l, \quad r, l \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (1.3.1)$$

что равносильно

$$\ln \Lambda_{r,l} > \ln \Lambda_0, \quad r \neq l. \quad (1.3.2)$$

Здесь $\Lambda_{r,l}$ – отношение правдоподобия для r -го варианта сигнала относительно l -го, зависящее в рассматриваемом случае как от статистических характеристик шума и параметров сигнала и узкополосных помех, так и от структурных свойств сигнала и помех в частотно-временной области; Λ_0 – пороговый

уровень, определяемый функцией потерь и априорными вероятностями передаваемых символов.

При выборе функции потерь таким образом, что платы за правильные решения равны нулю, а платы за ошибочные решения одинаковы, приходим к критерию минимальной полной вероятности ошибки или критерию идеального наблюдателя (критерию В.А. Котельникова [88]). Применительно к системам передачи дискретных сообщений этот критерий в настоящее время получил наибольшее распространение вследствие своей простоты и наглядности [51]. Для этого критерия пороговый уровень Λ_0 в (1.3.1), (1.3.2) определяется отношением априорных вероятностей передаваемых символов. Известно [198], что в рационально построенной системе передачи дискретных сообщений символы кодовых последовательностей приблизительно равновероятны. Поэтому в дальнейшем будем использовать критерий Котельникова при допущении, что передаваемые символы равновероятны. При этом пороговый уровень Λ_0 в соотношениях (1.3.1), (1.3.2) равен

$$\Lambda_0 = 1, \quad \ln \Lambda_0 = 0 \quad (1.3.3)$$

и оптимальное правило решения о приеме r -го варианта сигнала (1.3.2) приобретает вид

$$\ln \Lambda_{r,l} > 0, \quad r \neq l, \quad r, l \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (1.3.4)$$

Отношение правдоподобия в (1.3.4) при использовании недискретизированных наблюдений в общем случае можно представить в форме

$$\Lambda_{r,l} = \frac{\int W(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}{\int_{G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})} W(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_l, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}. \quad (1.3.5)$$

Здесь $\mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ – функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\mathcal{Z}'(t)$ при передаче сигнала $\mathcal{Z}_r(t)$, определяемый формулой (1.2.20) или (1.2.22) при фиксированных параметрах $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}$;

$W(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ – совместная плотность вероятности случайных параметров $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}$. Если передаваемые сигналы и узкополосные помехи взаимно независимы, то

$$W(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = W(\boldsymbol{\theta})W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}); \quad (1.3.6)$$

$G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ – область интегрирования, определяемая пределами изменения параметров $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}$.

Плотности распределения вероятностей случайных параметров $W(\boldsymbol{\theta})$ и $W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ в некоторых случаях могут быть заданы. В тех случаях, когда эти распределения неизвестны, их можно сформировать, используя процедуру обучения, если параметры сигналов и помех меняются достаточно медленно. Тогда приемные устройства становятся адаптивными, обучающимися и самообучающимися. Для обучения необходимо располагать обучающей выборкой (классифицированной или неклассифицированной). Наиболее полной характеристикой, которую можно извлечь из наблюдаемых реализаций обучающей выборки, является апостериорная плотность вероятностей интересующих параметров сигнала и помех. Ее можно найти по формуле Байеса.

В зависимости от объема априорных сведений различают случаи:

1. Известна условная плотность вероятностей наблюдаемой реализации (функция правдоподобия) и обучающая выборка (классифицированная или неклассифицированная).

2. Неизвестна функция правдоподобия наблюдаемой реализации, известна только обучающая выборка (классифицированная или неклассифицированная).

Решаемые нами в дальнейшем задачи в основном будут относиться к первому случаю, когда известна функция правдоподобия наблюдаемой реализации. Основанием к этому служит принятое нами представление аддитивных помех в виде суммы некоторой компоненты гауссова флуктуационного шума (что обеспечивает устойчивость решений и избавляет от сингулярности) и компоненты, допускающей аппроксимацию случайными процессами из класса квазидетерминированных.

При неизвестной условной плотности вероятностей наблюдаемых реализаций формирование ее может осуществляться по обучающей выборке различными методами (смотри, например, [154, 155, 208]). При этом приемные устройства значительно усложняются.

Вначале рассмотрим прием с обучением по узкополосным помехам, а затем по сигналу и помехам. Для обучения по помехам необходимо иметь обучающую выборку помех.

Классифицированной обучающей выборкой помех будем называть последовательность реализаций смеси узкополосных помех с шумом в интервалах времени отсутствия полезного сигнала, т. е.

$$\mathfrak{x}_1(t), \mathfrak{x}_2(t), \dots, \mathfrak{x}_k(t), \dots, \mathfrak{x}_N(t), \quad (1.3.7)$$

где

$$\mathfrak{x}_k(t) = \gamma_k(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) + \xi(t). \quad (1.3.8)$$

Классифицированную обучающую выборку (1.3.8) можно получить с помощью специальных испытательных интервалов времени выключения передатчика (идеально классифицированная) либо в интервалах между рабочими посылками (реально классифицированная), если передача ведется сигналами с перекрывающимися спектрами. Для этого в приемнике используют, например,

обратную связь по решению. Классифицированную обучающую выборку помех целесообразно использовать при постоянных либо достаточно медленных изменениях параметров помех. Тогда вначале на интервале времени от 0 до NT ведется измерение параметров помех (обучение по помехам), затем осуществляется прием сигнала с использованием результатов измерений.

Неклассифицированной обучающей выборкой помех будем называть последовательность принятых реализаций смеси сигнала с узкополосными помехами и шумом. Неклассифицированную обучающую выборку помех можно использовать при относительно быстрых изменениях параметров помех, особенно в тех случаях, когда формирование оценки помех должно происходить непосредственно на интервале решения.

Адаптивный алгоритм работы приемника с обучением по узкополосным помехам получим из (1.3.4), (1.3.5) заменой априорного распределения вероятностей параметров помех апостериорным, сформированным с помощью обучающей выборки (1.3.7). При этом отношение правдоподобия (1.3.5) примет вид:

$$\Lambda_{rl} = \frac{\int W(\boldsymbol{\theta})W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}/\boldsymbol{x}_N)\mathcal{F}(Z'/Z_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}{\int_{G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})} W(\boldsymbol{\theta})W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}/\boldsymbol{x}_N)\mathcal{F}(Z'/Z_l, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}, \quad (1.3.9)$$

где $W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}/\boldsymbol{x}_N)$ – апостериорное распределение параметров помех $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}$, вычисленное с помощью обучающей выборки (1.3.7) по формуле Байеса[100]

$$W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}/\boldsymbol{x}_N) = \frac{W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi})\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_N/\boldsymbol{\theta}_{\Pi})}{\int W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi})\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_N/\boldsymbol{\theta}_{\Pi})d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}. \quad (1.3.10)$$

Здесь $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_N/\boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ представляет собой функционал отношения правдоподобия обучающей выборки помех (1.3.7):

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_N/\boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \exp \left\{ \frac{2}{\nu^2} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\boldsymbol{x}_k(t)\boldsymbol{\gamma}_k(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_k^2(t, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) \right] dt \right\}. \quad (1.3.11)$$

В (1.3.10) $W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi})$ – априорная плотность вероятности параметров помех $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}$. Если в качестве априорного распределения на данном этапе определения апостериорного распределения взять апостериорное, полученное на предыдущем этапе, то, в соответствии с теоремой Бернштейна и Мизеса [112], по мере увели-

чения размера обучающей выборки, апостериорное распределение перестает зависеть от априорного при непрерывной априорной плотности $W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi})$.

В дальнейшем будет показано, что алгоритм (1.3.9) состоятельный, т. е. по мере увеличения размера обучающей выборки он сходится по вероятности к конечному пределу. При неизменных параметрах помех апостериорное распределение сходится к дельта-функции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \delta(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} - \boldsymbol{\theta}_{\Pi}^0), \quad (1.3.12)$$

где $\boldsymbol{\theta}_{\Pi}^0$ – вектор истинных значений неизвестных параметров помех. Тогда алгоритм (1.3.9) сходится к алгоритму приема для полностью известных помех, т. е. в пределе происходит полная компенсация узкополосных помех. В этом смысле алгоритм, использующий отношение правдоподобия (1.3.9), можно назвать асимптотически оптимальным.

Апостериорное распределение параметров помех можно представить также в рекуррентном виде

$$W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} / \boldsymbol{x}_N) = \frac{W(\boldsymbol{x}_N / \boldsymbol{\theta}_{\Pi}, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{N-1}) W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} / \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{N-1})}{W(\boldsymbol{x}_N / \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{N-1})}. \quad (1.3.13)$$

В тех случаях, когда апостериорные плотности (1.3.13) на каждом этапе будут принадлежать тому же семейству, что и априорные, т. е. вид функции апостериорного распределения сохраняется неизменным, а изменяются только ее параметры, алгоритм (1.3.13) можно заменить эквивалентным рекуррентным алгоритмом для определения параметров апостериорного распределения. При этом структура алгоритма адаптивного приемника на всех этапах адаптации будет сохраняться, изменяться будут только параметры блоков оценки. Необходимые и достаточные условия, при которых апостериорные плотности принадлежат тому же семейству, что и априорные, приведены в работе [155].

В некоторых случаях удобно использовать распределение неизвестных параметров помех в виде

$$W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi}) = \delta(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi}), \quad (1.3.14)$$

где $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi}$ – вектор оценки параметров узкополосных помех, сформированный с помощью обучающей выборки (классифицированной или неклассифицированной). Использование распределения (1.3.14) приводит к алгоритмам, построенным на принципе замены неизвестных параметров помех их оценками.

Будем определять оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi}$ как апостериорное среднее

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) = \int \boldsymbol{\theta}_{\Pi} W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} / \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}. \quad (1.3.15)$$

Можно показать [111], что такая процедура определения оценок состоятельна, т. е. дает оценки, которые сходятся к определенному пределу. Для доказательства состоятельности используется теорема Дэли [214].

Теорема. Любая последовательность a_1, a_2, \dots, a_N , такая, что

$$a_k = \int f(\boldsymbol{\theta}_\Pi) dP_k(\boldsymbol{\theta}_\Pi), \quad (1.3.16)$$

где $P_k(\boldsymbol{\theta}_\Pi) = P(\boldsymbol{\theta}_\Pi / \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k)$, $1 \leq k \leq N$,

вероятностная мера, есть ограниченный мартингал [55], если

- 1) $f(\boldsymbol{\theta}_\Pi)$ – любая неотрицательная измеримая по Лебегу функция,
- 2) $\max f(\boldsymbol{\theta}_\Pi) = M < \infty$.

Тогда последовательность $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi 1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi 2}, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi N}\}$, каждый член которой определяется (1.3.16), является ограниченным мартингалом. В соответствии с теоремой Дуба [55] предел ограниченного мартингала существует с вероятностью единица, т. е.

$$\lim \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi N} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi, \infty} \text{ и } E\left\{ \left| \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Pi, \infty} \right| \right\} \leq M,$$

где $E\{\cdot\}$ – символ математического ожидания. Следовательно, адаптивная процедура оценки (1.3.15) является состоятельной.

Из условия (1.3.12) следует состоятельность оценок:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \boldsymbol{\theta}_\Pi \mathcal{W}_N(\boldsymbol{\theta}_\Pi) d\boldsymbol{\theta}_\Pi = \boldsymbol{\theta}_\Pi^0. \quad (1.3.17)$$

Конечно, разработчиков интересует скорость сходимости адаптивных алгоритмов к оптимальным. Поэтому в дальнейшем предстоит оценить проигрыш в помехоустойчивости полученных алгоритмов при обучении на ограниченном интервале времени. Этот вопрос приобретает особую остроту в каналах с изменяющимися параметрами помех и детально рассматривается в последующих главах.

Далее рассмотрим прием с обучением по сигналу и по узкополосным помехам. Обучение по сигналу ведется с помощью обучающей выборки:

$$\mathbf{Z}'_{N+1}(t), \mathbf{Z}'_{N+2}(t), \dots, \mathbf{Z}'_k(t), \dots, \mathbf{Z}'_M(t), \quad (1.3.18)$$

где $\mathbf{Z}'_k(t)$ – определяется выражением (1.2.3).

Функционал отношения правдоподобия обучающей выборки (1.3.18) можно представить в виде

$$\mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ \frac{2}{V^2} \sum_{k=N+1}^M \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\mathbf{Z}'_k(t) (\hat{\mathbf{Z}}_{\Pi}(t) + \mathbf{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta})) - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{Z}}_{\Pi}(t) + \mathbf{Z}_r(t, \boldsymbol{\theta}))^2 \right] dt \right\}, \quad (1.3.19)$$

где $\hat{\mathbf{Z}}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \hat{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t)$ – оценка совокупности узкополосных помех, сформированная по классифицированной либо неклассифицированной обучающей выборке помех.

Адаптивный алгоритм работы приемника с обучением по сигналу и по помехе получим заменой априорной плотности $W(\boldsymbol{\theta})$ в формуле (1.3.9) апостериорной, сформированной с помощью обучающей выборки (1.3.18). Апостериорную плотность найдем по формуле Байеса

$$W(\boldsymbol{\theta} / \mathbf{Z}'_M) = \frac{W(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\theta})}{\int W(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}. \quad (1.3.20)$$

С учетом (1.3.20) отношение правдоподобия (1.3.9) примет вид:

$$\Lambda_{rl} = \frac{\int_{G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})} W(\boldsymbol{\theta} / \mathbf{Z}'_M) W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}(\mathbf{Z}' / \mathbf{Z}_r, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}{\int_{G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi})} W(\boldsymbol{\theta} / \mathbf{Z}'_M) W(\boldsymbol{\theta}_{\Pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}(\mathbf{Z}' / \mathbf{Z}_l, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\Pi}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{\Pi}}, \quad r \neq l. \quad (1.3.21)$$

В последующих главах будет показано, что алгоритм приема, в котором отношение правдоподобия определено выражением (1.3.21), состоятелен. В каналах с неизменными параметрами он сходится к алгоритму когерентного приема. В этом смысле будем называть его асимптотически оптимальным. В реальных условиях интерес представляет скорость сходимости полученного алгоритма к оптимальному. В дальнейшем этот вопрос будет рассмотрен особо.

Анализ помехоустойчивости. В задачу анализа входит определение вероятности правильных или ошибочных решений о переданном сигнале при заданном виде преобразований наблюдаемых данных и заданных условиях регистрации полезного сигнала в приемном устройстве.

Пусть на вход приемного устройства поступает смесь сигнала с помехой вида (1.2.3) или (1.2.21). Алгоритм работы приемного устройства определяется соотношениями (1.3.4) с учетом (1.3.9) или (1.3.21). Вероятность ошибочного

решения при передаче сигнала $Z_r(t) (r = 1, 2, \dots, m)$ найдем как вероятность выполнения неравенства, противоположного (1.3.4). В общем случае полную вероятность можно определить по формуле

$$p = \int_{G(\theta, \theta_{\Pi})} W(\theta, \theta_{\Pi}) p_{\text{ycl}}(\theta, \theta_{\Pi}) d\theta d\theta_{\Pi}, \quad (1.3.22)$$

где $p_{\text{ycl}}(\theta, \theta_{\Pi})$ – условная вероятность ошибочного приема элемента сигнала, вычисленная в предположении постоянства параметров θ и θ_{Π} . Ее можно найти как вероятность невыполнения системы неравенств, определяемой заданным правилом решения

$$\varepsilon_r - \varepsilon_l > A, \quad r \neq l, \quad r \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (1.3.23)$$

Здесь ε_r – величина, монотонно зависящая от условной плотности вероятностей совокупности реализаций принимаемых сигналов при передаче r -го символа; A – неслучайный пороговый уровень.

Для двоичных систем ($m = 2$) при априорно равновероятных передаваемых сигналах формула (1.3.22) приобретает вид

$$p = \frac{1}{2} \int_{G(\theta, \theta_{\Pi})} W(\theta, \theta_{\Pi}) [P(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < A/Z_1(t), \theta, \theta_{\Pi}) + P(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 > A/Z_2(t), \theta, \theta_{\Pi})] d\theta d\theta_{\Pi}. \quad (1.3.24)$$

При релейских замираниях узкополосных помех и произвольном характере распределений полезного сигнала вероятность ошибки можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \int_{G(\theta)} W(\theta) [P((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) < A/Z_1(t), \theta) + P((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > A/Z_2(t), \theta)] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{G(\theta)} W(\theta) \left[\int_{-\infty}^A W((\varepsilon_1^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)})/\theta) d(\varepsilon_1^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)}) + \int_A^{\infty} W((\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)})/\theta) d(\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)}) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

В каналах с релейскими замираниями сигналов и помех вероятность ошибки более просто вычисляется с использованием соотношения:

$$p = \frac{1}{2} \{ P[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) < A/Z_1(t)] + P[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > A/Z_2(t)] \} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^A W(\varepsilon_1^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)}) d(\varepsilon_1^{(1)} - \varepsilon_2^{(1)}) + \int_A^{\infty} W(\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)}) d(\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)}) \right]. \quad (1.3.26)$$

Либо при $A = 0$

$$p = \frac{1}{2} \left[P(\varepsilon_1 < \varepsilon_2 / Z_1(t)) + P(\varepsilon_1 > \varepsilon_2 / Z_2(t)) \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \int_{\varepsilon_1^{(1)}}^{\infty} W(\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}) d\varepsilon_1^{(1)} d\varepsilon_2^{(1)} + \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon_2^{(2)}}^{\infty} W(\varepsilon_1^{(2)}, \varepsilon_2^{(2)}) d\varepsilon_1^{(2)} d\varepsilon_2^{(2)} \right], \quad (1.3.27)$$

где $W(\varepsilon_1^{(r)}, \varepsilon_2^{(r)})$ – совместная плотность вероятности случайных величин ε_1 и ε_2 при передаче r -го символа сообщения ($r=1, 2$).

При нерелеевских замираниях узкополосных помех использование формул (1.3.25)–(1.3.27) для аналитических расчетов затруднительно. Однако тот анализ помехоустойчивости, который удается произвести аналитически при релеевских замираниях узкополосных помех, является хорошей иллюстрацией практических возможностей решающих правил приема, синтезированных в работе. В других условиях можно использовать современные, хорошо разработанные вычислительные методы и методы моделирования на электронных вычислительных машинах.

2. ОДИНОЧНЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ

2.1. Вводные замечания

В предыдущей главе было отмечено, что большинство опубликованных к настоящему времени работ по вопросам борьбы с узкополосными помехами посвящено рассмотрению действия помех на системы, построенные оптимально для каналов с белым шумом, например [76, 126, 139, 160, 169]. Вопросы построения оптимальных и субоптимальных приемников при одновременном действии флуктуационных и узкополосных помех рассматривались в работах [4, 14, 140–143, 198 и др.]. В указанных работах не затрагивались вопросы обучения при приеме в каналах с узкополосными помехами. Прием с обучением по узкополосным помехам рассматривался в работах автора данной монографии, в частности, фрагменты теории одиночного адаптивного приема содержатся в [144, гл. 6; 172, 173, 177, 182 и др.].

В этой главе приведено систематическое изложение результатов исследования по вопросам построения адаптивных систем связи в каналах с узкополосными и флуктуационными помехами применительно к одиночному приему на основании методов синтеза и анализа, заложенных в предыдущей главе и базирующихся главным образом на использовании квазидетерминированной модели узкополосных помех в сочетании с обучением в рамках теории статистических решений. Основное внимание уделено синтезу адаптивных алгоритмов приема, а также анализу помехоустойчивости полученных алгоритмов в различных условиях. В конце главы обсуждаются вопросы построения решающих правил приема на основе стохастической модели узкополосных помех с использованием методов уравнений состояния в сочетании с методами динамической адаптации.

Действующую на входе приемника смесь сигнала с помехой (1.2.3) представим в виде

$$\begin{aligned} Z'(t) = \mu_c Z_r(t) + \mu_s \tilde{Z}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[\mu_{c\Pi i} Z_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i} \tilde{Z}_{\Pi i}(t) \right] + \xi(t), \\ LT \leq t < (L+1)T; \quad r = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где $Z_r(t)$ и $Z_{\Pi i}(t)$ – функции, определяющие переданный сигнал и узкополосную помеху; $\tilde{Z}_r(t)$ и $\tilde{Z}_{\Pi i}(t)$ – функции, сопряженные им по Гильберту; $\mu_s, \mu_c, \mu_{s\Pi i}, \mu_{c\Pi i}$ – ортогональные составляющие коэффициентов передачи канала для сигнала и i -и узкополосной помехи; N_{Π} – число узкополосных помех; $\xi(t)$ – реализация флуктуационной помехи, аппроксимируемая белым гауссовым шумом с нулевым средним, со спектральной плотностью мощности ν^2 ; T – длительность элемента сигнала.

В дальнейшем с целью упрощения анализа будем считать, что воздействующие на сигнал узкополосные помехи имеют неперекрывающиеся спектры [144, гл. 3]. При этом для любых $i \neq j$ справедливы соотношения

$$\int_T \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) \mathcal{Z}_{\Pi j}(t) dt = 0, \quad \int_T \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi j}(t) dt = 0, \\ i, j = 1, 2, \dots, N_{\Pi}; N_{\Pi} \geq 2. \quad (2.1.2)$$

2.2. Адаптивные алгоритмы одиночного приема с обучением по узкополосным помехам

Определим структуру адаптивного приемника с обучением по узкополосным помехам при приеме совокупности полезного сигнала и помех $\mathcal{Z}'(t)$ вида (2.1.1). В соответствии с принятым критерием идеального наблюдателя для априорно равновероятных передаваемых сигналов оптимальное правило для принятия решения о приеме r -го варианта сигнала определяется неравенством (1.3.4)

$$\ln \Lambda_{r/l} > 0, \quad r \neq l, \quad (2.2.1)$$

в котором $\Lambda_{r/l}$ есть отношение правдоподобия для r -го варианта сигнала относительно l -го (1.3.5) и равно в данном случае при действии на входе смеси (2.1.1):

$$\Lambda_{r/l} = \frac{\int W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi}) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_{\Pi}}{\int_{G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi})} W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_l, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi}) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_{\Pi}}. \quad (2.2.2)$$

Здесь

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\Pi}) = \exp \left\{ \frac{2}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'(t) [\mu_c \mathcal{Z}_r(t) + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (\mu_{c\Pi i} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t))] dt - \frac{1}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mu_c \mathcal{Z}_r(t) + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (\mu_{c\Pi i} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t))]^2 dt \right\} \quad (2.2.3)$$

– функционал отношения правдоподобия принятой реализации;

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_c, \mu_s\}; \boldsymbol{\mu}_\Pi = \{\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i}\} i = 1, \dots, N_\Pi;$$

$W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi)$ – совместная плотность вероятностей параметров сигнала и узкополосных помех. В дальнейшем полагаем их независимыми, тогда

$$W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) = W(\boldsymbol{\mu})W(\boldsymbol{\mu}_\Pi). \quad (2.2.4)$$

$G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi)$ – область интегрирования, определяемая пределами изменения параметров сигнала и помех.

Адаптивный алгоритм работы приемника с обучением по узкополосным помехам получим заменой априорного распределения параметров узкополосных помех в (2.2.2) апостериорным, сформированным при помощи обучающей выборки помех. Как уже отмечалось в первой главе, обучение возможно с помощью классифицированной либо неклассифицированной выборки. Рассмотрим обучение с помощью классифицированной выборки помех

$$\mathfrak{x}^{(1)}(t), \mathfrak{x}^{(2)}(t), \dots, \mathfrak{x}^{(k)}(t), \dots, \mathfrak{x}^{(N)}(t), \quad (2.2.5)$$

$$\text{где } \mathfrak{x}^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{N_\Pi} \left[\mu_{c\Pi i}^{(k)} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i}^{(k)} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) \right] + \xi(t). \quad (2.2.5a)$$

В этом случае на интервале времени от 0 до NT ведется измерение неизвестных параметров помех (обучение по помехам), после чего производится прием сигнала с использованием измеренных значений.

После замены в (2.2.2) априорного распределения параметров помех $W(\boldsymbol{\mu}_\Pi)$ апостериорным $W(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathfrak{x}^{(N)})$, сформированным при помощи обучающей выборки (2.2.5), отношение правдоподобия будет определяться выражением

$$\Lambda_{r/l} = \frac{\int_{G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi)} W(\boldsymbol{\mu})W(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathfrak{x}^{(N)}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_\Pi}{\int_{G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi)} W(\boldsymbol{\mu})W(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathfrak{x}^{(N)}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_l, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_\Pi}. \quad (2.2.6)$$

Найдем апостериорное распределение $W(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathfrak{x}^{(N)})$ по формуле Байеса

$$W(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathfrak{x}^{(N)}) = \frac{W(\boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi}) \mathcal{F}_N(\mathfrak{x}^{(N)} / \boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi})}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi}) \mathcal{F}_N(\mathfrak{x}^{(N)} / \boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi}) d\boldsymbol{\mu}_{c\Pi} d\boldsymbol{\mu}_{s\Pi}}. \quad (2.2.7)$$

Здесь $\mathcal{F}_N(\mathbf{x}^{(N)} / \boldsymbol{\mu}_{\text{СП}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{СИ}})$ – функционал отношения правдоподобия обучающей выборки помех (2.2.5), равный

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{x}^{(N)} / \boldsymbol{\mu}_{\text{СП}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{СИ}}) = \exp \left\langle \frac{2}{\nu^2} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} \left\{ \mathbf{x}^{(k)}(t) \sum_{i=1}^{N_{\text{п}}} \left[\mu_{\text{СП}i}^{(k)} \mathbf{Z}_{\text{П}i}(t) + \mu_{\text{СИ}i}^{(k)} \tilde{\mathbf{Z}}_{\text{П}i}(t) \right] - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{п}}} \left(\mu_{\text{СП}i}^{(k)} \mathbf{Z}_{\text{П}i}(t) + \mu_{\text{СИ}i}^{(k)} \tilde{\mathbf{Z}}_{\text{П}i}(t) \right) \right]^2 \right\} dt \right\rangle. \quad (2.2.8)$$

С учетом упрощающего ограничения (2.1.2) функционал отношения правдоподобия (2.2.8) можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(\mathbf{x}^{(N)} / \boldsymbol{\mu}_{\text{СП}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{СИ}}) &= \prod_{i=1}^{N_{\text{п}}} \mathcal{F}_{N_i}(\mathbf{x}^{(N)} / \mu_{\text{СП}i}^s) = \\ &= \prod_{i=1}^{N_{\text{п}}} \exp \left\{ \frac{1}{\hat{\sigma}_{\text{П}i}^2} \sum_{k=1}^N \left[\mu_{\text{СП}i}^{(k)} \hat{\mu}_{\text{СП}i}^{(k)} - \frac{1}{2} \mu_{\text{СП}i}^{(k)2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

где

$$\hat{\mu}_{\text{СП}i}^{(k)} = \frac{1}{E_{\text{П}i}} \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{x}^{(k)}(t) \mathbf{Z}_{\text{П}i}(t) dt, \quad \hat{\mu}_{\text{СИ}i}^{(k)} = \frac{1}{E_{\text{П}i}} \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{x}^{(k)}(t) \tilde{\mathbf{Z}}_{\text{П}i}(t) dt \quad (2.2.10)$$

– максимально правдоподобные оценки параметров i -и узкополосной помехи на k -м этапе наблюдения;

$$\hat{\sigma}_{\text{П}i}^2 = \frac{\nu^2}{2E_{\text{П}i}} \text{ – дисперсия этих оценок;}$$

$$E_{\text{П}i} = P_{\text{П}i} T = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{Z}_{\text{П}i}^2(t) dt = \int_{(k-1)T}^{kT} \tilde{\mathbf{Z}}_{\text{П}i}^2(t) dt.$$

При этом апостериорное распределение параметров помех (2.2.7) примет вид

$$W(\boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi} / \boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)}) = \prod_{i=1}^{N_n} W_i(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i} / \boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)}), \quad (2.2.11)$$

где

$$W_i(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i} / \boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)}) = \frac{W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i}) \mathcal{F}_{N_i}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)} / \mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i})}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i}) \mathcal{F}_{N_i}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)} / \mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i}) d\mu_{c\Pi i} d\mu_{s\Pi i}} \quad (2.2.12)$$

В (2.2.12) $W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i})$ – априорная плотность вероятности параметров i -ой узкополосной помехи. Если в качестве априорного распределения на данном этапе определения апостериорного распределения взять апостериорное, полученное на предыдущем этапе, то в соответствии с теоремой Бернштейна и Мизеса по мере увеличения размера обучающей выборки, апостериорное распределение перестает зависеть от априорного при непрерывной априорной плотности $W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i})$. Таким образом, при достаточно большом объеме обучающей выборки более или менее безразлично, какую функцию $W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i})$ подставить в формулу (2.2.12). Если взять нормальное априорное распределение на первом этапе наблюдения, то апостериорные плотности (2.2.12) на каждом этапе также будут нормальными, изменяться будут только их параметры. Это обеспечит постоянство структуры приемника на всех этапах адаптации, изменяться будут только параметры блоков оценки узкополосных помех.

Рассмотрим, например, случай, когда априорное распределение вероятностей параметров i -ой помехи имеет вид

$$W(\mu_{c\Pi i}, \mu_{s\Pi i}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{c\Pi i}\sigma_{s\Pi i}} \exp\left[-\frac{(\mu_{c\Pi i} - m_{c\Pi i}^0)^2}{2\sigma_{c\Pi i}^2} - \frac{(\mu_{s\Pi i} - m_{s\Pi i}^0)^2}{2\sigma_{s\Pi i}^2}\right]. \quad (2.2.13)$$

Такое распределение вероятностей параметров может наблюдаться в четырехпараметрическом или обобщенно гауссовском канале [77]. Из него следуют различные частные случаи распределения амплитуд случайных процессов: обобщенное и простое релеевское, m – распределение Накагамы, усеченное нормальное и т. д. При этом апостериорное распределение, вычисленное по формуле (2.2.11) с учетом (2.2.9), будет определяться выражением

$$W(\boldsymbol{\mu}_{c\Pi}, \boldsymbol{\mu}_{s\Pi} / \boldsymbol{\mathfrak{X}}^{(N)}) = \prod_{i=1}^{N_n} \frac{1}{2\pi\sigma_{cNi}^2\sigma_{sNi}^2} \exp\left[-\frac{(\mu_{c\Pi i} - m_{c\Pi i})^2}{2\sigma_{cNi}^2} - \frac{(\mu_{s\Pi i} - m_{s\Pi i})^2}{2\sigma_{sNi}^2}\right], \quad (2.2.14)$$

где

$$m_{c\Pi i} = \frac{1}{1 + \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N\sigma_{c\Pi i}^2}} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{c\Pi i}^{(k)} + \frac{m_{c\Pi i}^0 \hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N\sigma_{c\Pi i}^2} \right), \quad (2.2.15a)$$

$$\sigma_{cNi}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N\sigma_{c\Pi i}^2} \right)} \quad (2.2.15b)$$

– параметры апостериорного распределения. Из (2.2.15) нетрудно видеть, что при условии

$$\frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N\sigma_{c\Pi i}^2} \ll 1 \quad (2.2.16)$$

параметры априорного распределения на первом этапе наблюдения практически не влияют на параметры апостериорного распределения. Условие (2.2.16) выполняется при $N \gg 1$ и произвольных $\hat{\sigma}_{\Pi i}^2 / \sigma_{c\Pi i}^2$.

При малых N условие (2.2.16) выполняется, если энергия помехи на входе приемника достаточно велика по сравнению со спектральной плотностью шума, т. е. при $\sigma_{c\Pi i}^2 / \hat{\sigma}_{\Pi i}^2 \gg 1$ или $2\sigma_{c\Pi i}^2 E_{\Pi i} / \nu^2 \gg 1$.

Тогда вид априорного распределения практически не сказывается на апостериорном $W(\mu_{c\Pi}, \mu_{s\Pi} / \mathfrak{X}^{(N)})$.

При условии (2.2.16) формулы (2.2.15) примут вид

$$m_{c\Pi i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{c\Pi i}^{(k)}, \quad m_{s\Pi i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{s\Pi i}^{(k)}, \quad (2.2.17)$$

$$\sigma_{cNi}^2 = \sigma_{sNi}^2 = \sigma_{Ni}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N}, \quad (2.2.18)$$

а априорное распределение параметров помех можно считать равномерным.

Подставляя апостериорное распределение (2.2.14) в (2.2.6) в соответствии с (2.2.1), получим адаптивные алгоритмы приема с обучением по узкополосным помехам при различных предположениях о статистических характеристиках параметров сигнала. В частности, для полностью известного сигнала после подстановки (2.2.14) в (2.2.6) и соответствующих преобразований алгоритм приемника будет определяться неравенством

$$\begin{aligned}
 & \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) \right] \left[\mu_c \mathcal{Z}_r(t) + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) \right] dt - \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2} E_c B_r > \\
 & > \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) \right] \left[\mu_c \mathcal{Z}_l(t) + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_l(t) \right] dt - \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2} E_c B_l, \quad (2.2.19) \\
 & \qquad \qquad \qquad r \neq l.
 \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 X_r &= \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) \right] \mathcal{Z}_r(t) dt, \\
 Y_r &= \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) \right] \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) dt,
 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

алгоритм (2.2.19) можно преобразовать также к виду

$$\mu_c X_r + \mu_s Y_r - \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2} E_c B_r > \mu_c X_l + \mu_s Y_l - \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2} E_c B_l, \quad r \neq l. \quad (2.2.21)$$

В этих выражениях

$$\hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \hat{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[\frac{m_{c\Pi i} + \frac{x_i^{(\Pi)}}{NE_{\Pi i}}}{1 + \frac{1}{N}} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) + \frac{m_{s\Pi i} + \frac{y_i^{(\Pi)}}{NE_{\Pi i}}}{1 + \frac{1}{N}} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) \right] \quad (2.2.22)$$

– оценка совокупности узкополосных помех. Здесь

$$x_i^{(\Pi)} = \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t)\mathbf{Z}_{\Pi i}(t)]dt, \quad y_i^{(\Pi)} = \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t)\tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t)]dt. \quad (2.2.23)$$

Из (2.2.22) и (2.2.23) видно, что в общем случае формирование оценки совокупности узкополосных помех происходит как на интервале времени, предшествующему интервалу решения (при помощи классифицированной обучающей выборки помех), так и непосредственно на интервале решения (2.2.23) (при помощи неклассифицированной по помехам реализации принятой смеси). При $N \gg 1$ из (2.2.22) как частный случай следует оценка совокупности узкополосных помех, сформированная только при помощи классифицированной обучающей выборки

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} [m_{c\Pi i} \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) + m_{s\Pi i} \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t)]. \quad (2.2.24a)$$

Формирование оценки совокупности узкополосных помех по правилу (2.2.23) при помощи классифицированной обучающей выборки помех на интервале, предшествующему интервалу решения, целесообразно в каналах с неизменными или медленно меняющимися параметрами узкополосных помех.

Формирование оценки совокупности узкополосных помех по неклассифицированной реализации входной смеси на интервале решения может потребоваться при быстрых изменениях параметров узкополосных помех. Тогда из (2.2.22) при $N = 0$ получим

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[\frac{x_i^{(\Pi)}}{E_{\Pi i}} \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) + \frac{y_i^{(\Pi)}}{E_{\Pi i}} \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t) \right]. \quad (2.2.24б)$$

Заметим, что в приемнике, построенном на принципе замены неизвестных параметров узкополосных помех их оценками, форма оценки совокупности узкополосных помех совпадает с (2.2.24a) либо с (2.2.24б) в зависимости от используемой обучающей выборки (классифицированной либо неклассифицированной). Оценка в форме (2.2.22) является обобщением обоих случаев.

Пороговый уровень в (2.2.19), (2.2.21) определяется величиной энергии элемента принятого сигнала $\mu^2 E_c$,

где

$$E_c = P_r T = \int_{LT}^{(L+1)T} \mathbf{Z}_r^2(t) dt = \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{\mathbf{Z}}_r^2(t) dt,$$

и коэффициентом

$$B_r = 1 - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{g_{ori}^2}{1 + N \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2}{N \sigma_{\text{шп}i}^2}\right)}.$$

При условии (2.2.16) он равен

$$B_r = 1 - \frac{g_{or}^2}{1 + N}, \quad \text{где } g_{or}^2 = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} g_{ori}^2. \quad (2.2.25)$$

Здесь

$$g_{ori}^2 = \frac{x_i^{(\Pi r)^2} + y_i^{(\Pi r)^2}}{E_c E_{\Pi i}} = \frac{1}{E_c E_{\Pi i}} \left[\left(\int_{LT}^{(L+1)T} Z_r(t) Z_{\Pi i}(t) dt \right)^2 + \left(\int_{LT}^{(L+1)T} Z_r(t) \tilde{Z}_{\Pi i}(t) dt \right)^2 \right] \quad (2.2.26)$$

– коэффициент взаимной корреляции r -го сигнала с i -и узкополосной помехой. Этот коэффициент характеризует различие структур используемых сигналов и воздействующих узкополосных помех в частотно-временной области. Его свойства подробно рассмотрены в [144, п. 2, 3]. Здесь приведем одну из наглядных форм записи g_{ori}^2 в случае сигналов и помех с примерно равномерными спектрами

$$g_{ori}^2 = \frac{k_i}{F_r T}, \quad (2.2.27)$$

где k_i – некоторая постоянная для данных функций $Z_r(t)$ и $Z_{\Pi i}(t)$ величина, удовлетворяющая условию:

$$1 \leq k_i \leq F_{\Pi i} T \leq F_r T.$$

Здесь $2F_r T$ – база сигнала, $2F_{\Pi i} T$ – база узкополосной помехи.

Особенностью адаптивного алгоритма работы приемника (2.2.19), (2.2.21) является процедура вычитания из принятого сигнала оценки совокупности узкополосных помех (2.2.22), полученной с помощью обучающей выборки, с последующей корреляционной обработкой и сравнением результатов обработки для каждой позиции сигнала со своим порогом. В каналах с нулевой скоростью изменения параметров помех по мере увеличения объема обучающей выборки узкополосные помехи определяются все точнее и в пределе алгоритм (2.2.19),

(2.2.21) приближается к алгоритму когерентного приемника для полностью известных помех.

Для сигналов с одинаковыми энергиями, а также при условии симметричного воздействия узкополосных помех на все варианты сигнала, т. е.

$$g_{ori}^2 = g_{oi}^2 = \text{const}(r), \quad (2.2.28)$$

алгоритм (2.2.21) упрощается и принимает вид

$$\mu_c X_r + \mu_s Y_r > \mu_c X_l + \mu_s Y_l, \quad r \neq 1. \quad (2.2.29)$$

В частном случае двоичных систем с пассивной паузой решение о наличии сигнала принимается, если

$$\mu_c X_1 + \mu_s Y_1 > \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2} E_c B_1, \quad (2.2.30)$$

Решение об отсутствии сигнала принимается при обратном знаке неравенства в (2.2.30).

Далее найдем алгоритм приема сигналов, известных с точностью до фазы ψ . Для этого заменим в (2.2.21) ортогональные составляющие коэффициента передачи канала μ_c и μ_s эквивалентными соотношениями

$$\mu_c = \mu \cos \psi, \quad \mu_s = \mu \sin \psi \quad (2.2.31)$$

и максимизируем полученное выражение по ψ .

После подстановки (2.2.31) в (2.2.21) получим

$$X_r \cos \psi + Y_r \sin \psi - \frac{\mu E_c B_r}{2} > X_l \cos \psi + Y_l \sin \psi - \frac{\mu E_c B_l}{2}, \quad r \neq l. \quad (2.2.32)$$

Максимум обеих частей неравенства (2.2.32) достигается при подстановке в него вместо ψ оценок $\hat{\psi}$, полученных как решение уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \ln \mathcal{F}[\mathcal{Z}'(t)/\mathcal{Z}_r(t), \psi] = 0. \quad (2.2.33)$$

Здесь $\mathcal{F}[\mathcal{Z}'(t)/\mathcal{Z}_r(t), \psi]$ представляет собой функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\mathcal{Z}'(t)$ при передаче сигнала $\mathcal{Z}_r(t)$ и фиксированном ψ , усредненный по неизвестным параметрам узкополосных помех. Он равен

$$\mathcal{A}[\mathcal{Z}(t)/\mathcal{Z}_r(t), \psi] = \exp \left\{ \frac{\mu^2 E_c B_r}{v^2} + \frac{2\mu}{v^2} X_r \cos \psi + \frac{2\mu}{v^2} Y_r \sin \psi \right\}. \quad (2.2.34)$$

После решения (2.2.33) с учетом (2.2.34) получим оценку

$$\hat{\psi} = \operatorname{arctg} \frac{Y_r}{X_r}. \quad (2.2.35)$$

Заменяя в (2.2.32) ψ на $\hat{\psi}$ из (2.2.35) найдем алгоритм работы адаптивно-некогерентного приемника в каналах с узкополосными помехами

$$V_r - \frac{\mu E_c B_r}{2} > V_l - \frac{\mu E_c B_l}{2}, \quad r \neq l, \quad (2.2.36)$$

где

$$V_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2}, \quad (2.2.37)$$

X_r и Y_r определяются (2.2.20).

Для сигналов с одинаковыми энергиями и при условии (2.2.28) алгоритм (2.2.36) приобретает вид

$$V_r > V_l, \quad r \neq l. \quad (2.2.38)$$

Для двоичных систем с пассивной паузой правило приема определяется неравенством

$$V_1 > \frac{1}{2} \mu E_c B_1. \quad (2.2.39)$$

Как и при приеме точно известного сигнала здесь происходит формирование оценки совокупности узкополосных помех с целью компенсации при помощи обучающей выборки (2.2.5). Далее производится обычная квадратурная обработка сигналов с последующим сравнением результатов обработки для каждой позиции сигнала со своим порогом. При этом в каналах с нулевой скоростью изменения параметров помех, по мере увеличения объема обучающей выборки, алгоритм (2.2.36) приближается к алгоритму оптимального некогерентного приемника для полностью известных помех.

В условиях замираний сигнала оптимальное решающее правило можно найти путем усреднения (2.2.6) в соответствии с распределением параметров сигнала

ла. Рассмотрим, например, случай релейевских замираний сигнала. При этом ортогональные составляющие μ_c и μ_s распределены по нормальному закону

$$W(\mu_c, \mu_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_c^2} \exp\left(-\frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2\sigma_c^2}\right). \quad (2.2.40)$$

Подставляя в (2.2.6) апостериорное распределение параметров помех (2.2.14) и параметров сигнала (2.2.40) и интегрируя сначала по $\mathbf{\mu}_\Pi$, затем по $\mathbf{\mu}$, получим в соответствии с (2.2.1) алгоритм

$$\frac{\overline{h^2 V_r^2}}{v^2 E_c (1 + \overline{h^2 B_r})} - \frac{\overline{h^2 V_l^2}}{v^2 E_c (1 + \overline{h^2 B_l})} > \ln \frac{1 + \overline{h^2 B_r}}{1 + \overline{h^2 B_l}}, \quad (2.2.41)$$

где $V_r^2 = X_r^2 + Y_r^2$; $\overline{h^2} = \frac{2\sigma_c^2 E_c}{v^2}$ – среднестатистическое значение отно-

шения энергии принятого сигнала к спектральной плотности шума. Анализируя алгоритм (2.2.41), можно сделать те же выводы, что и при анализе (2.2.36), т. е. в решающей схеме должна предусматриваться процедура формирования оценки совокупности узкополосных помех при помощи обучающей выборки с целью компенсации. После чего ведется такая же обработка сигналов, как и в обычной решающей схеме при абсолютно некогерентном приеме с последующим сравнением результатов обработки с пороговыми уровнями, зависящими от коэффициентов взаимной корреляции сигналов с узкополосными помехами. При использовании сигналов с одинаковыми энергиями и симметричном воздействии узкополосных помех на все варианты сигнала необходимость в порогах отпадает, т. е. правило (2.2.41) принимает вид

$$V_r^2 > V_l^2, \quad r \neq l, \quad (2.2.42)$$

что эквивалентно также (2.2.38).

Для двоичных сигналов с пассивной паузой условие регистрации определяется неравенством

$$\frac{\overline{h^2 V_1^2}}{v^2 E_c (1 + \overline{h^2 B_1})} > \ln(1 + \overline{h^2 B_1}). \quad (2.2.43)$$

При обратном знаке неравенства в (2.2.43) принимается решение об отсутствии сигнала.

2.3. Состоятельность адаптивных алгоритмов одиночного приема с обучением по узкополосным помехам

Алгоритм будем называть состоятельным, если отношение правдоподобия сходится в определенном смысле к конечному пределу при увеличении размера обучающей выборки помех, т. е. если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_r < \infty. \quad (2.3.1)$$

Рассмотрим, прежде всего, свойства оценки совокупности узкополосных помех (2.2.22) в каналах с медленными изменениями параметров помех. Для этого надо исследовать свойства оценок параметров узкополосных помех $m_{с\pi i}$

(2.2.15а) при увеличении размера обучающей выборки помех N . В нашем случае условие (2.2.16) выполняется, поэтому рассмотрим оценки $m_{с\pi i}$ в форме (2.2.17)

$$m_{с\pi i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{с\pi i}^{(k)}. \quad (2.3.2)$$

Покажем состоятельность оценок (2.3.2). Как известно [100], оценка называется состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при неограниченном увеличении размера обучающей выборки N . В данном случае для оценок (2.3.2) имеет место сходимость в среднеквадратичном, из которой, в соответствии с неравенством Чебышева следует сходимость по вероятности. Покажем сходимость в среднеквадратичном оценок (2.3.2) к истинным параметрам $m_{с\pi i}^0$ при увеличении размера обучающей выборки N . Для этого

развернем выражение (2.3.2) подстановкой в него (2.2.10) с учетом (2.2.5а) и (2.1.2). Условием применимости полученных в предыдущем параграфе алгоритмов является медленность изменения параметров узкополосных помех на интервале измерения и использования измеренных значений, тогда можно считать, что все $\mu_{с\pi i}^{(k)} \cong m_{с\pi i}^0$. Поэтому

$$\begin{aligned} m_{с\pi i} &= m_{с\pi i}^0 + \frac{1}{NE_{\pi i}} \int_0^{NT} \xi(t) \mathbf{Z}_{\pi i}(t) dt, \\ m_{s\pi i} &= m_{s\pi i}^0 + \frac{1}{NE_{\pi i}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{\mathbf{Z}}_{\pi i}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Из (2.3.3) имеет место следующее соотношение для среднеквадратичного расстояния

$$\left\| m_{с\pi i} - m_{с\pi i}^0 \right\|_s = \sqrt{\left| m_{с\pi i} - m_{с\pi i}^0 \right|_s^2} = \frac{\hat{\sigma}_{\pi}}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (2.3.4)$$

поэтому

$$l.i.m. \underset{N \rightarrow \infty}{m_{с\pi i}} = m_{с\pi i}^0, \quad (2.3.5)$$

т. е. является пределом в среднеквадратичном для оценок $m_{с\pi i}$.

Таким образом, при неизменных параметрах узкополосных помех на интервале измерения и использования измеренных значений оценки $m_{с\pi i}$ сходятся в среднеквадратичном к истинным значениям параметров при увеличении размера обучающей выборки. Поэтому

$$l.i.m. \underset{N \rightarrow \infty}{\hat{\mathcal{Z}}_{\pi i}}(t) = m_{с\pi i}^0 \mathcal{Z}_{\pi i}(t) + m_{с\pi i}^0 \tilde{\mathcal{Z}}_{\pi i}(t). \quad (2.3.6)$$

Заметим, что в данном случае имеет место сходимость и с вероятностью единица, поскольку выполняется условие [133]

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left\| m_{с\pi i} - m_{с\pi i}^0 \right\|_s^2 < \infty. \quad (2.3.7)$$

Подставляя (2.2.22) в (2.2.20) в соответствии с (2.3.5), (2.3.6) убеждаемся, что алгоритмы (2.2.21), (2.2.36), (2.2.41) сходятся к алгоритмам, оптимальным для полностью известных узкополосных помех. Такие алгоритмы будем называть асимптотически оптимальными.

Для полноты картины отметим, что оценки $m_{с\pi i}$ (2.3.2) несмещенные, т. к.

$$\overline{\left\{ m_{с\pi i} \right\}}_s = m_{с\pi i}^0, \quad \text{и эффективные, поскольку информация по Фишеру из (2.2.9)}$$

равна

$$J(\mu_{с\pi i}) = \left[\frac{\partial}{\partial \mu_{с\pi i}} \ln \mathcal{F}_{N_i}(\mathfrak{x}^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{с\pi i}) \right]_s^2 = \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_{\pi}^2} \sum_{k=1}^N (\hat{\mu}_{с\pi i}^{(k)} - \mu_{с\pi i}^{(k)}) \right]_s^2 = \frac{N}{\hat{\sigma}_{\pi}^2}. \quad (2.3.8)$$

При сделанных предположениях о характере шумов оценки $m_{с\pi i}$ имеют нормальное распределение, т. к. являются результатом линейных операций над нормальными случайными процессами, со средним значением $m_{с\pi i}^0$ и диспер-

$$\text{сией } D(m_{с\pi i}) = \frac{\hat{\sigma}_{\pi i}^2}{N}.$$

При неограниченном увеличении N распределение оценок $m_{с\pi i}$ сходится к дельта-функции. Нетрудно убедиться, что апостериорное распределение неизвестных параметров узкополосных помех (2.2.14) по мере увеличения размера обучающей выборки N сходится к виду

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W \left(\mathbf{\mu}_{с\pi} / \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)} \right) = \prod_{i=1}^{N_{\pi}} \delta_i \left(\mu_{с\pi i} - \mu_{с\pi i}^0 \right) \quad (2.3.9)$$

вследствие (2.3.5) и стремления $W \left(\mu_{с\pi i} / \mathbf{x}^{(N)} \right)$ к дельта-функции

$\delta_i \left(\mu_{с\pi i} - m_{с\pi i} \right)$. Для исследования скорости сходимости полученных алгоритмов к оптимальным проанализируем помехоустойчивость приема.

2.4. Помехоустойчивость одиночного когерентного приема с обучением по помехам

Прием незамирающих сигналов. Проведем анализ помехоустойчивости когерентного приема двоичных сигналов по правилу (2.2.19). Рассмотрим системы с активной паузой (с противоположными и ортогональными сигналами) с одинаковыми энергиями и системы с пассивной паузой. Для этого запишем алгоритм (2.2.19) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_C}{v^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_{\pi}(t)][\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{Z}_2(t)] dt + \\ & + \frac{\mu_S}{v^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_{\pi}(t)][\tilde{\mathbf{Z}}_1(t) - \tilde{\mathbf{Z}}_2(t)] dt > A, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где

$$A = \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{2\nu^2} E_c (B_1 - B_2) = \frac{h^2}{2} (B_1 - B_2) \quad (2.4.2)$$

– пороговый уровень. Здесь

$$h^2 = \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{\nu^2} E_c = \frac{\mu^2 E_c}{\nu^2} \quad (2.4.3)$$

– отношение энергии элемента принятого сигнала к спектральной плотности мощности шума.

Вероятность ошибки определим по формуле

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left[P(\mathfrak{a}^{(1)} < A) + P(\mathfrak{a}^{(2)} > A) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^A W(\mathfrak{a}^{(1)}) d\mathfrak{a}^{(1)} + \int_A^{\infty} W(\mathfrak{a}^{(2)}) d\mathfrak{a}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

где $\mathfrak{a}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) определяется левой частью неравенства (2.4.1) при передаче соответствующего сигнала $Z_1(t)$ или $Z_2(t)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^{(r)} &= \frac{\mu_c}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [Z'(t) - \hat{Z}_\Pi(t)][Z_1(t) - Z_2(t)] dt + \\ &+ \frac{\mu_s}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [Z'(t) - \hat{Z}_\Pi(t)][\tilde{Z}_1(t) - \tilde{Z}_2(t)] dt. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Помехоустойчивость приема в общем случае будем определять для условий изменения параметров узкополосных помех с конечной скоростью. При этом принятая смесь сигнала с помехами (2.1.1) будет иметь вид

$$Z'(t) = \mu_c Z_r(t) + \mu_s \tilde{Z}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_H} \left[\mu_{c\Pi i}(t) Z_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i}(t) \tilde{Z}_{\Pi i}(t) \right] + \xi(t). \quad (2.4.6)$$

Найдем составляющие оценки совокупности узкополосных помех (2.2.22) в форме

$$m_{c\text{ivi}}^{(\Theta)} = \frac{1}{1+N} \left(Nm_{c\text{ivi}} + \frac{x_i^{(\Pi)}}{E_{\text{ivi}}} \right); \quad m_{s\text{ivi}}^{(\Theta)} = \frac{1}{1+N} \left(Nm_{s\text{ivi}} + \frac{y_i^{(\Pi)}}{E_{\text{ivi}}} \right), \quad (2.4.7)$$

где $m_{c\text{ivi}}$ и $m_{s\text{ivi}}$ определяются соотношениями (2.2.17). Для этого поставим в (2.4.7) выражения (2.2.23) и (2.2.17) с учетом (2.2.10), (2.2.5), (2.4.6) и проведем поперiodное усреднение произведений быстроменяющихся функций под знаками интегралов аналогично [4, 41]. Получим

$$\begin{aligned} m_{c\text{ivi}}^{(\Theta)} &= \frac{1}{1+N} \left[\frac{1}{NT} \int_0^{NT} \mu_{c\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{c\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} (\mu_c x_i^{(\text{iv}r)} - \mu_s y_i^{(\text{iv}r)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} \int_0^{NT} \xi(t) \mathcal{Z}_{\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \mathcal{Z}_{\text{ivi}}(t) dt \right], \\ m_{s\text{ivi}}^{(\Theta)} &= \frac{1}{1+N} \left[\frac{1}{NT} \int_0^{NT} \mu_{s\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{s\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} (\mu_c y_i^{(\text{iv}r)} + \mu_s x_i^{(\text{iv}r)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\text{ivi}}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{ivi}}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\text{ivi}}(t) dt \right], \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} x_i^{(\text{iv}r)} &= \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}_r(t) \mathcal{Z}_{\text{ivi}}(t) dt = \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\text{ivi}}(t) dt, \\ y_i^{(\text{iv}r)} &= \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}_r(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\text{ivi}}(t) dt = - \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) \mathcal{Z}_{\text{ivi}}(t) dt, \quad r=1,2. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

После подстановки в (2.4.5) $\tilde{Z}^i(t)$ из (2.4.6) и оценки

$$\hat{\tilde{Z}}_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[m_{\text{сн}i}^{(\Theta)} \tilde{Z}_{\text{н}i}(t) + m_{\text{сн}i}^{(\Theta)} \tilde{\tilde{Z}}_{\text{н}i}(t) \right] \quad (2.4.10)$$

с учетом (2.4.8) и поперiodного усреднения произведений быстроменяющихся функций под знаками интегралов найдем $\mathfrak{a}^{(1)}$ при передаче сигнала $\tilde{Z}_1(t)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^{(1)} = & \frac{\mu_c^2 + \mu_s^2}{v^2} E_c \left[1 - \rho - \frac{1}{1+N} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (g_{01i}^2 - g_{12}^{(i)}) \right] + \frac{\mu_c}{v^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) [\tilde{Z}_1(t) - \\ & - \tilde{Z}_2(t)] dt + \frac{\mu_s}{v^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) [\tilde{\tilde{Z}}_1(t) - \tilde{\tilde{Z}}_2(t)] dt + \frac{\mu_c}{v^2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (x_i^{(m)} - x_i^{(n2)}) \times \\ & \times \left\{ \frac{N}{(N+1)T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{\text{сн}i}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{\text{сн}i}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{Z}_{\text{н}i}(t) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{\text{н}i}(t) dt \right] \right\} + \frac{\mu_c}{v^2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (y_i^{(m)} - y_i^{(n2)}) \left\{ \frac{N}{(N+1)T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{\text{сн}i}(t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{\text{сн}i}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{\tilde{Z}}_{\text{н}i}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{\tilde{Z}}_{\text{н}i}(t) dt \right] \right\} + \\ & + \frac{\mu_s}{v^2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (x_i^{(m)} - x_i^{(n2)}) \left\{ \frac{N}{(N+1)T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{\text{сн}i}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{\text{сн}i}(t) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{\tilde{Z}}_{\text{н}i}(t) dt + \frac{1}{E_{\text{н}i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{\tilde{Z}}_{\text{н}i}(t) dt \right] \right\} + \frac{\mu_s}{v^2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (y_i^{(m)} - \end{aligned}$$

$$-y_i^{(m)}) \left\{ \frac{N}{(N+1)T} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{cni}(t) dt + \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{cni}(t) dt + \frac{1}{E_{ni}} \int_0^{NT} \xi(t) Z_{ni}(t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{E_{ni}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) Z_{ni}(t) dt \right] \right\}. \quad (2.4.11)$$

Аналогично можно найти $\mathbf{a}^{(2)}$ при передаче сигнала $Z_2(t)$.

Из (2.4.11) видно, что в общем случае при изменении параметров узкополосных помех с конечной скоростью их компенсации не происходит. Предположим, что узкополосные помехи замирают по релеевскому закону, тогда μ_{cni} имеют нормальное распределение с нулевым средним, с дисперсией $\sigma_{ni}^2 = \mu_{noi}^2/2$ и корреляционной функцией

$$R_{ni}(t_1, t_2) = \frac{2}{\mu_{noi}^2} \overline{\mu_{cni}(t_1)\mu_{cni}(t_2)} = \frac{2}{\mu_{noi}^2} \overline{\mu_{sni}(t_1)\mu_{sni}(t_2)}. \quad (2.4.12)$$

В этих условиях $\mathbf{a}^{(r)}$ ($r=1,2$) представляют собой нормальные случайные величины со средними значениями

$$\overline{\mathbf{a}^{(1)}} = h^2 \left[1 - \rho - \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N_{\pi}} (g_{01i}^2 - g_{12}^{(i)}) \right], \quad (2.4.13)$$

$$\overline{\mathbf{a}^{(2)}} = -h^2 \left[1 - \rho - \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N_{\pi}} (g_{02i}^2 - g_{12}^{(i)}) \right]$$

и дисперсиями

$$D(\mathbf{a}^{(1)}) = D(\mathbf{a}^{(2)}) = \sigma^2 = h^2 \left[1 - \rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\pi}} g_i^2 \left(\frac{N^2}{(1+N)^2} r_{ni}^2 \bar{h}_{ni}^2 - \frac{1}{N+1} \right) \right], \quad (2.4.14)$$

где

$$\rho = \frac{1}{E_c} \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{Z}_1(t) \tilde{Z}_2(t) dt = \frac{1}{E_c} \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{\tilde{Z}}_1(t) \tilde{\tilde{Z}}_2(t) dt,$$

$\rho = -1$ для противоположных сигналов, $\rho = 0$ для ортогональных сигналов;

$$g_i^2 = g_{01i}^2 + g_{02i}^2 - 2g_{12}^{(i)} \quad (2.4.15)$$

– коэффициент, характеризующий различимость сигналов и i -ой узкополосной помехи. Он определяется через коэффициенты взаимной корреляции сигналов с i -ой помехой (2.2.26) и коэффициент $g_{12}^{(i)}$, равный

$$g_{12}^{(i)} = \frac{1}{E_c E_{\Pi i}} \left(x_i^{(\Pi 1)} x_i^{(\Pi 2)} + y_i^{(\Pi 1)} y_i^{(\Pi 2)} \right). \quad (2.4.16)$$

Далее в (2.4.14) обозначено:

$\bar{h}_{\Pi i}^2 = \frac{\mu_{\Pi 0i}^2 E_{\Pi i}}{\nu^2}$ – среднестатистическое значение отношения энергии i -ой узкополосной помехи к спектральной плотности шума;

$$r_{\Pi i} = r_{\Pi 1i} + r_{\Pi 2i} - 2r_{\Pi 3i}, \quad (2.4.17)$$

где

$$\begin{aligned} r_{\Pi 1i} &= \frac{1}{T^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \int_{LT}^{(L+1)T} R_{\Pi i}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ r_{\Pi 2i} &= \frac{1}{(NT)^2} \int_0^{NT} \int_0^{NT} R_{\Pi i}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ r_{\Pi 3i} &= \frac{1}{NT^2} \int_0^{NT} \int_{LT}^{(L+1)T} R_{\Pi i}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Коэффициент $r_{\Pi i}$ (2.4.17) характеризует скорость изменения параметров узкополосных помех. При нулевой скорости изменения параметров помех он

равен нулю ($r_{\text{III}} = 0$). При конечной скорости изменения параметров помех он отличен от нуля ($0 < r_{\text{III}} < 1$).

Таким образом, плотность вероятностей $\mathfrak{a}^{(r)}$ ($r=1,2$) имеет вид

$$W(\mathfrak{a}^{(r)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{\left(\mathfrak{a}^{(r)} - \overline{\mathfrak{a}^{(r)}}\right)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.4.19)$$

После подстановки (2.4.19) в (2.4.4) вероятность ошибки определится выражением

$$p = \frac{1}{2} [1 - \Phi(h_{\mathfrak{a}})], \quad (2.4.20)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция Крампа, табулированная в [156];

$$h_{\mathfrak{a}} = \frac{h \left[1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{II}}} \frac{g_i^2}{1+N} \right]}{\sqrt{1 - \rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{II}}} \frac{g_i^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\text{III}} \overline{h_{\text{III}}^2} - 1 \right)}} \quad (2.4.21)$$

– для сигналов с активной паузой;

$$h_{\mathfrak{a}} = \frac{h \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{II}}} \frac{g_{01i}^2}{1+N} \right]}{\sqrt{2 \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{II}}} \frac{g_{01i}^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\text{III}} \overline{h_{\text{III}}^2} - 1 \right) \right]}} \quad (2.4.22)$$

– для сигналов с пассивной паузой.

Приведенные выражения показывают, что вероятность ошибки зависит от отношения энергии принятого сигнала к спектральной плотности мощности шума h^2 , от коэффициентов g_i^2 , характеризующих различие структур сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области, а также от размера обучающей выборки помех N . В общем случае вероятность ошибки зависит от

энергии узкополосных помех ($\overline{h_{II}^2}$) и от скорости изменения их параметров (r_{II}). В частном случае, в условиях неизменных параметров узкополосных помех на интервале измерения и использования измеренных значений ($r_{II} = 0$), вероятность ошибки не зависит от мощности узкополосных помех, т. к. они компенсируются в приемнике. При этом происходит увеличение интенсивности флуктуационных шумов. Однако по мере увеличения размера обучающей выборки N роль этих шумов уменьшается и в пределе вероятность ошибки стремится к значению, характеризующему помехоустойчивость приема в белом шуме, что подтверждает асимптотическую оптимальность рассматриваемых алгоритмов.

В каналах с неизменными параметрами узкополосных помех вероятность ошибки определяется выражением

$$p = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\gamma h_3)]. \quad (2.4.23)$$

в котором

$$\gamma^2 = \begin{cases} 2 - \text{для противоположных сигналов,} \\ 1 - \text{для ортогональных сигналов,} \\ 0.5 - \text{для сигналов с пассивной паузой;} \end{cases} \quad (2.4.24)$$

$$h_3^2 = h^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{N_{II}} \frac{g_{01i}^2}{1 + N} \right) \quad (2.4.25)$$

– для противоположных сигналов и сигналов с пассивной паузой;

$$h_3^2 = h^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{II}} \frac{g_i^2}{1 + N} \right) \quad (2.4.26)$$

– для ортогональных сигналов.

Для иллюстрации быстроты сходимости вероятности ошибки к предельному значению, обусловленному белым шумом, на рис. 2.4.1 приведена зависимость $p = f(N)$ (кривая 1), вычисленная по формуле (2.4.23) с учетом (2.4.26) для системы с ортогональными сигналами с неперекрывающимися спектрами ($g_{12}^{(i)} = 0$), когда на каждый вариант сигнала действует одиночная узкополосная помеха ($N_{II} = 1$), совпадающая с сигналом ($g_{01}^2 = g_{02}^2 = 1$). Приведенная зависимость позволяет оценить проигрыш в помехоустойчивости при обучении на конечном интервале времени. Например, при $N = 1$ энергетический проиг-

рыш составляет 3 дБ по сравнению со случаем отсутствия узкополосных помех, т. е. в канале с белым шумом. При $N = 2 \div 3$ этот проигрыш уменьшается до 1,8–1,2 дБ, а при $N = 4 \div 5$ он составляет 1–0,8 дБ. Заметим, что в этих условиях в приемнике без обучения, т. е. оптимальном для каналов с белым шумом, вероятность ошибки равна $p \cong 0.5$. В рассматриваемых условиях отсутствия избыточности по сигналу ($g_{01}^2 = g_{02}^2 = 1$) высокая достоверность приема обеспечивается в результате обучения на интервалах времени, предшествующих интервалу решения.

На рис. 2.4.1 приведены также зависимости $p = f(h)$ (кривые 2–5) при конечной скорости изменения параметров узкополосных помех, рассчитанные по формуле (2.4.20) с учетом (2.4.21) при $\rho = 0$.

Для оценки влияния скорости изменения параметров помех на помехоустойчивость приема вычислим $r_{\text{ш}}$ (2.4.14) при аппроксимациях корреляционной функции $R_{\text{ш}}(t_1, t_2)$:

гауссовой кривой

$$R_{\text{ш}}(t_1, t_2) = \exp \left[-\frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_{0i}^2} \right], \quad (2.4.27)$$

экспонентой

$$R_{\text{ш}}(t_1, t_2) = \exp \left[-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{0i}} \right], \quad (2.4.28)$$

где τ_{0i} – интервал корреляции изменений параметров i -ой помехи.

При сделанных предположениях о медленных изменениях параметров помех ($T/\tau_{0i} \ll 1$), формулы (2.4.27), (2.4.28) можно заменить приближенными:

$$\begin{aligned} R_{\text{ш}}(t_1, t_2) &\approx 1 - \frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_{0i}^2}, \quad 0 \leq (t_1 - t_2) < NT, \\ R_{\text{ш}}(t_1, t_2) &\approx 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{0i}}, \quad 0 \leq |t_1 - t_2| < NT. \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

После вычисления (2.4.18) с учетом (2.4.29) и подстановки результата в (2.4.17), получим:

при гауссовой аппроксимации

$$r_{\text{ш}} = \frac{T^2}{4\tau_{0i}^2} \left[(N-1)^2 + 4L(L-N+1) \right], \quad L \geq N+1, \quad (2.4.30)$$

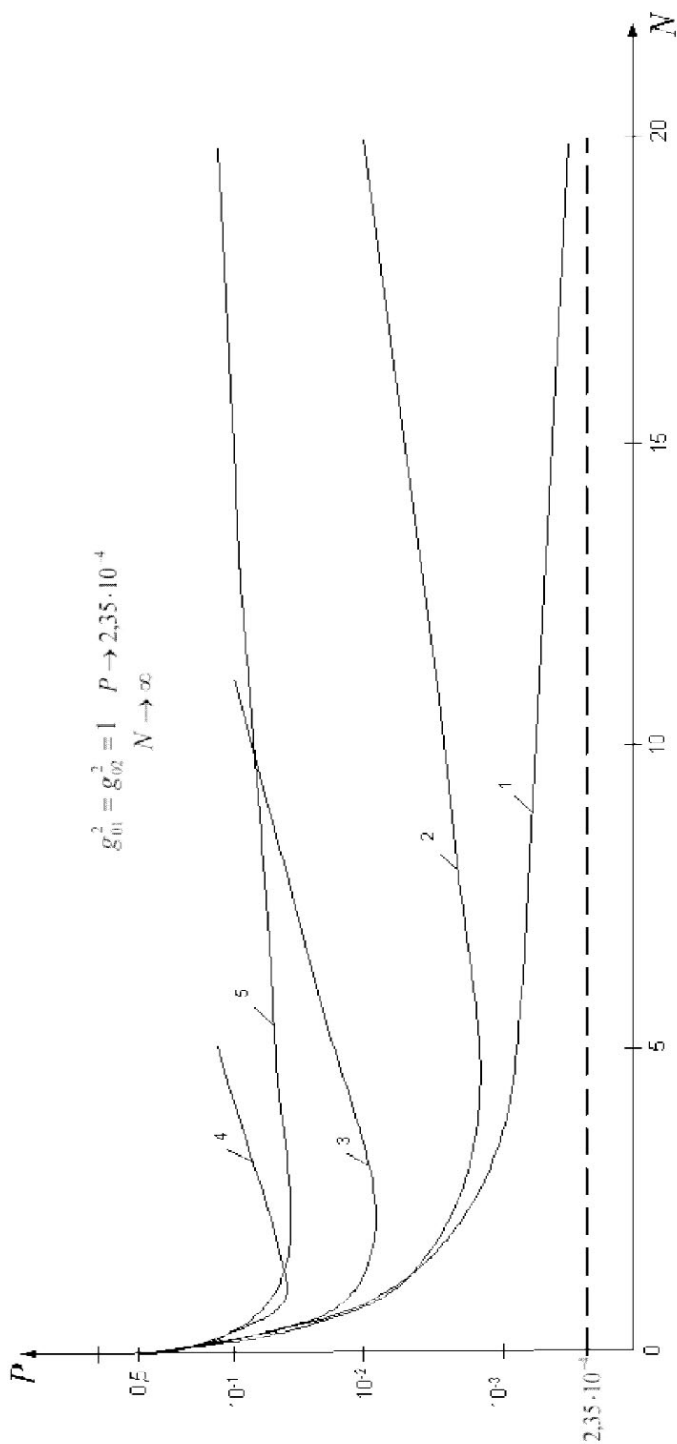


Рисунок 2.4.1. Зависимость $P = f(N)$ при разных $\overline{h_0 T^2} / \tau_0^2$

$$\left. \begin{array}{l}
 1 - \overline{h_0 T^2} / \tau_0^2 = 0; \quad 2 - \overline{h_0 T^2} / \tau_0^2 = 10^{-2} \\
 3 - \overline{h_0 T^2} / \tau_0^2 = 0,1; \quad 4 - \overline{h_0 T^2} / \tau_0^2 = 0,5 \\
 5 - \overline{h_0 T^2} / \tau_0^2 = 10^{-2}; \quad L - N = 10
 \end{array} \right\} L - N = 1$$

при экспоненциальной аппроксимации

$$r_{\Pi i} = \frac{2T}{3\tau_{0i}}(3L + 1 - 2N), \quad L \geq N + 1. \quad (2.4.31)$$

Из этих выражений следует, что в каналах с конечной скоростью изменения параметров помех, коэффициент $r_{\Pi i}$ пропорционален интервалу измерения параметров помех, интервалу использования измеренных значений и обратно пропорционален интервалу корреляции τ_{0i} . Поэтому интервал измерения должен быть небольшим, а результаты измерения нужно периодически обновлять.

Кривые 2–5 на рис. 2.4.1 построены в предположении гауссовой аппроксимации корреляционной функции $R_{\Pi i}(t_1, t_2)$, т. е. с учетом (2.4.30). Зависимости 2, 3, 4 рассчитаны соответственно при $\overline{h_{\Pi}^2} \frac{T}{\tau_0^2} = 10^{-2}$; 0.1; 0.5 и $L - N = 1$. Зави-

симось 5 рассчитана при $\overline{h_{\Pi}^2} \frac{T}{\tau_0^2} = 10^{-2}$ и $L - N = 10$. Из приведенных кривых

видно, что при конечной скорости изменения параметров узкополосных помех с увеличением интервала обучения помехоустойчивость может существенно ухудшаться из-за декорреляции параметров помех на интервале измерения и использования измеренных значений. Это заставляет ограничиваться интервалом измерения порядка $(1 \div 3)T$. Интервал использования измеренных значений также необходимо ограничивать.

На рис. 2.4.2 построены аналогичные зависимости, но в условиях, когда есть избыточность по сигналу ($g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0.5$). При этом ускоряется сходимость вероятности ошибки к предельному значению, обусловленному белым шумом, при неизменных параметрах узкополосных помех (кривая 1). При медленных изменениях параметров обучение на предшествующих интервалах времени при малых N уменьшает вероятность ошибки, затем при увеличении N вероятность ошибки увеличивается (кривые 2, 3). При быстрых изменениях параметров помех формирование оценок целесообразно вести на интервале решения по неклассифицированной реализации принятой смеси.

Чтобы проиллюстрировать влияние конечной скорости изменения параметров узкополосных помех и необходимости обновления результатов измерений, на рис. 2.4.3 приведены зависимости вероятности ошибки p от величины h^2 (кривые 2–5), вычисленные по формуле (2.4.20) с учетом (2.4.21), (2.4.30). Кривые рассчитаны в предположении, что $\rho = 0$; $N_{\Pi} = 1$; $g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0.5$; $g_{12} = 0$ (на оба варианта ортогональных сигналов с неперекрывающимися спектрами действуют одиночные узкополосные помехи), $\overline{h_{\Pi}^2} = 10^2$; $T/\tau_0 = 10^{-2}$.

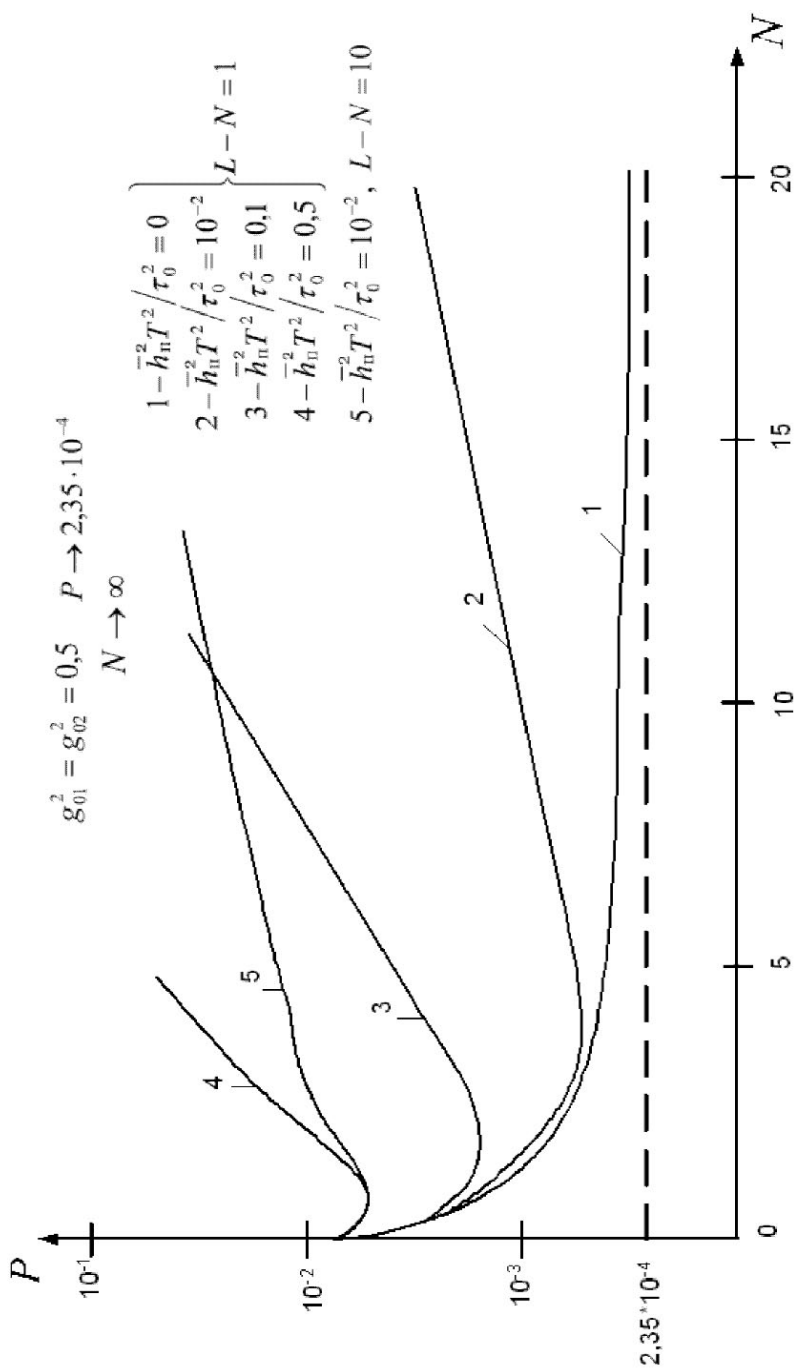


Рисунок 2.4.2- Зависимость $P = f(N)$ при разных $\bar{h}_n T^2 / \tau_0^2$

Здесь же приведена кривая 1 для канала с белым шумом. Кривые 2, 3, 5 соответствуют гауссовой аппроксимации корреляционной функции $R_{\Pi i}(t_1, t_2)$ при $N = 1$ и $L - N = 1; 10; 30$. Из рассмотрения этих кривых следует, что при медленных изменениях параметров помех происходит достаточно эффективное подавление узкополосных помех при обучении по помехе на одном интервале наблюдения и использования измеренных значений на интервале до 10 элементов сигнала. При дальнейшем увеличении интервала использования измеренных значений параметров помех помехоустойчивость заметно ухудшается (кривая 5). Поэтому в каналах с конечной скоростью изменения параметров помех целесообразно применять сигналы с неперекрывающимися спектрами, чтобы интервалы между информационными посылками использовать для обучения по помехе и обновления измеренных значений через небольшие интервалы времени (порядка 2–3 элементов сигнала).

На этом же рисунке приведена зависимость p от h , для случая обучения по помехе на интервале решения (кривая 4), вычисленная по формуле (2.4.20) с учетом (2.4.21) при $N = 0$. При $N = 0$ выражения (2.4.21) и (2.4.22) принимают вид:

$$h_{\Theta} = h \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} g_{01i}^2} \quad (2.4.32)$$

– для противоположных сигналов и сигналов с пассивной паузой;

$$h_{\Theta} = h \sqrt{1 - 0.5 \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (g_{01i}^2 + g_{02i}^2 - 2g_{12}^{(i)})} \quad (2.4.33)$$

– для ортогональных сигналов.

Из (2.4.32), (2.4.33) видно, что при $N = 0$ вероятность ошибки не зависит от интенсивности узкополосных помех и скорости измерения их параметров. Достигается высокая достоверность благодаря избыточности по сигналу, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N_{\Pi}} g_{01i}^2 < 1; \quad 0.5 \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (g_{01i}^2 + g_{02i}^2 - g_{12}^{(i)}) < 1. \quad (2.4.34)$$

Физически это означает, что в условиях быстрых изменений параметров помех не должно быть перекрытия всех составляющих полезного сигнала мощными узкополосными помехами. Для этого надо увеличивать базу сигнала или базу системы связи, чтобы иметь возможность переходить на менее загруженные участки диапазона частот.

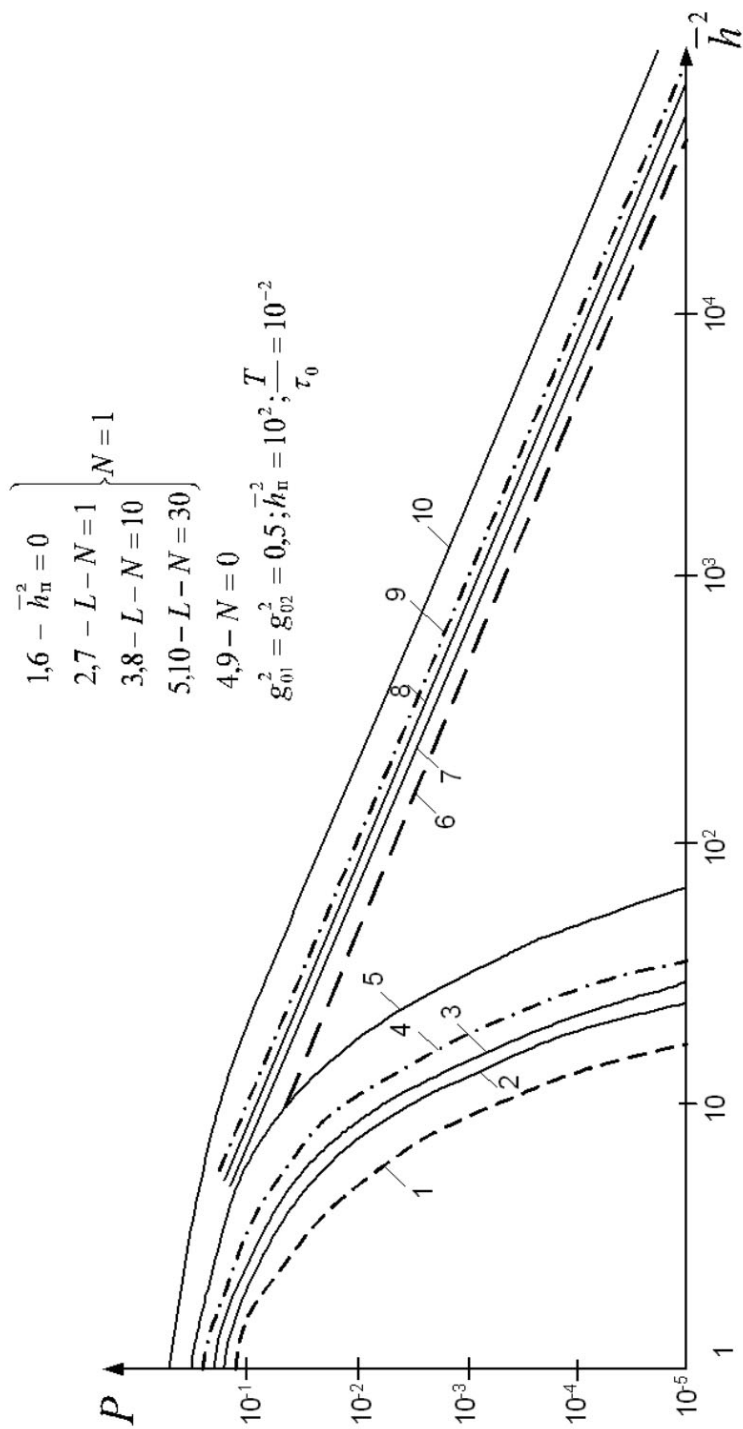


Рисунок 2.4.3- Зависимость $P = f(\bar{h}^2)$ при когерентном приеме

(Гауссова аппроксимация $R_{ii}(t_1, t_2)$)

Многие авторы [4, 198, 203] считают, что в большинстве случаев на реальных линиях связи корреляционная функция ортогональных составляющих коэффициента передачи канала близка к гауссовой кривой. При этом, как видим, достигаются хорошие результаты в измерении параметров помех с целью их подавления.

В некоторых случаях [4, 198, 203] используется экспоненциальная аппроксимация $R_{\mu}(t_1, t_2)$ корреляционной функции ортогональных составляющих коэффициента передачи канала с переменными параметрами. Рассмотрим возможности подавления помех в этом случае. Зависимости $p = f(h^2)$ для экспоненциальной аппроксимации приведены на рис. 2.4.4 (кривые 2–5). Кривые 2, 3, 5 рассчитаны по формуле (2.4.20) с учетом (2.4.21) и (2.4.31) при $N = 1$ и $L - N = 1$ соответственно при $\overline{h^2} T / \tau_0 = 0.1; 1; 10$. Остальные исходные предположения те же, что и при построении кривых 2, 3, 5 на рис. 2.4.3. Зависимость $p = f(h^2)$ при $N = 0$ совпадает с кривой 4. Из приведенных кривых видно, что изменения параметров помех с экспоненциальной корреляционной функцией $R_{\mu}(t_1, t_2)$ приводят при прочих равных условиях к большим погрешностям измерения параметров помех, вызванных декорреляцией, а следовательно, и к ухудшению помехоустойчивости приема. Используя избыточность по сигналу, можно получить высокую достоверность приема, не зависящую от интенсивности помех и скорости изменения их параметров.

Прием замирающих сигналов. Вероятность ошибочного приема в условиях медленных замираний сигнала можно найти усреднением полученных выше выражений для вероятностей ошибок при отсутствии замираний в соответствии с распределением μ :

$$p = \int_0^{\infty} p(\mu) W(\mu) d\mu. \quad (2.4.35)$$

При релейских замираниях сигнала $W(\mu)$ определяется соотношением

$$W(\mu) = \frac{2\mu}{\mu_0^2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}, \quad \mu \geq 0, \quad (2.4.36)$$

где $\mu_0^2 = \overline{\mu^2} = 2\sigma_c^2$ – среднестатистическое значение коэффициента передачи канала μ .

При подстановке в (2.4.35) выражений (2.4.36) и (2.4.20) и интегрирования вероятность ошибки будет равна

$$p = \int_0^{\infty} \frac{2\mu}{\mu_0^2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{\mu}{\mu_0} h_{\text{Э}0} \right) \right] d\mu = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{h_{\text{Э}0}^2}{2 + h_{\text{Э}0}^2}} \right], \quad (2.4.37)$$

где $h_{\text{Э}0}^2 = \overline{h_{\text{Э}}^2}$ – среднестатистическое значение $h_{\text{Э}}^2$, определяемое формулами (2.4.21), (2.4.22) при замене в них величины h^2 на среднестатистическое

$$\overline{h^2} = \frac{\mu_0^2 E_c}{\nu^2} = \frac{\overline{\mu^2} E_c}{\nu^2} = \frac{2\sigma_c^2 E_c}{\nu^2}. \quad (2.4.38)$$

Нетрудно видеть, что при релейских замираниях сигнала сохраняются отмеченные выше особенности приема в условиях узкополосных и флуктуационных помех. В частности, в каналах с замираниями сигнала и неизменными параметрами узкополосных помех по мере увеличения размера обучающей выборки N вероятность ошибки стремится к значению, характеризующему помехоустойчивость приема в белой шуме:

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\gamma^2 \overline{h^2}}{2 + \gamma^2 \overline{h^2}}} \right] \approx \frac{1}{2\gamma^2 \overline{h^2}}, \quad (2.4.39)$$

где γ^2 определяется (2.4.24).

В общем случае, когда параметры узкополосных помех меняются, вероятность ошибки зависит от мощности помех, от скорости изменения их параметров, от интервала измерения и использования измеренных значений параметров узкополосных помех.

Для иллюстрации на рис. 2.4.3 и 2.4.4 приведены зависимости вероятности ошибки p от $\overline{h^2}$ (кривые 7–10), рассчитанные по формуле (2.4.37) при тех же предположениях, что и кривые 2–5. Здесь же приведена кривая 6 для канала с флуктуационным шумом. В условиях медленных изменений параметров узкополосных помех возможно их эффективное подавление при использовании обучения на интервалах времени, предшествующих решению, при минимальной избыточности сигнала. При быстрых изменениях параметров помех эффективное подавление последних возможно только ценой увеличения избыточности по сигналу.

При обобщенных релейских замираниях сигнала распределение $W(\mu)$ имеет вид

$$W(\mu) = \frac{2\mu}{\mu_{\phi}^2} e^{-\frac{\mu^2 + \mu_p^2}{\mu_{\phi}^2}} I_0 \left(2 \frac{\mu\mu_p}{\mu_{\phi}^2} \right), \quad \mu \geq 0, \quad (2.4.40)$$

где μ_{ϕ} и μ_p – соответственно флуктуирующая и регулярная составляющая коэффициента передачи канала; $\overline{\mu_{\phi}^2}$ – среднестатистическое значение μ_{ϕ} ; $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 1 рода нулевого порядка.

Для определения вероятности ошибки нужно подставить (2.4.20) в (2.4.35) и проинтегрировать. Представим (2.4.20) в форме [47]:

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2} \overline{h_{\mathfrak{D}}^2}} \right) \right] = \frac{\sqrt{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{\mu^2}{\mu^2} \left(\frac{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}}{2} + t^2 \right) \right]}{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}/2 + t^2} dt, \quad (2.4.41)$$

где $\overline{\mu^2} = \overline{\mu_{\phi}^2} + \mu_p^2$; $\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}$ – определяется (2.4.21), (2.4.22) при замене h^2 на $\overline{h^2}$. Подставим (2.4.40) и (2.4.41) в (2.4.35)

$$p = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{\mu^2}{\mu^2} \left(\frac{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}}{2} + t^2 \right) \right]}{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}/2 + t^2} dt \right\} \frac{2\mu}{\mu_{\phi}^2} \exp \left(-\frac{\mu^2 + \mu_p^2}{\mu_{\phi}^2} \right) I_0 \left(\frac{2\mu\mu_p}{\mu_{\phi}^2} \right) d\mu. \quad (2.4.42)$$

Сделав замену переменной по формуле $\mu/\sqrt{\mu_{\phi}^2} = x$ и изменив порядок интегрирования в (2.4.42), получим

$$p = \frac{\sqrt{\overline{h_{\mathfrak{D}}^2}} e^{-d^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \overline{h_{\mathfrak{D}}^2}/2} 2 \int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} I_0(2xd) dx, \quad (2.4.43)$$

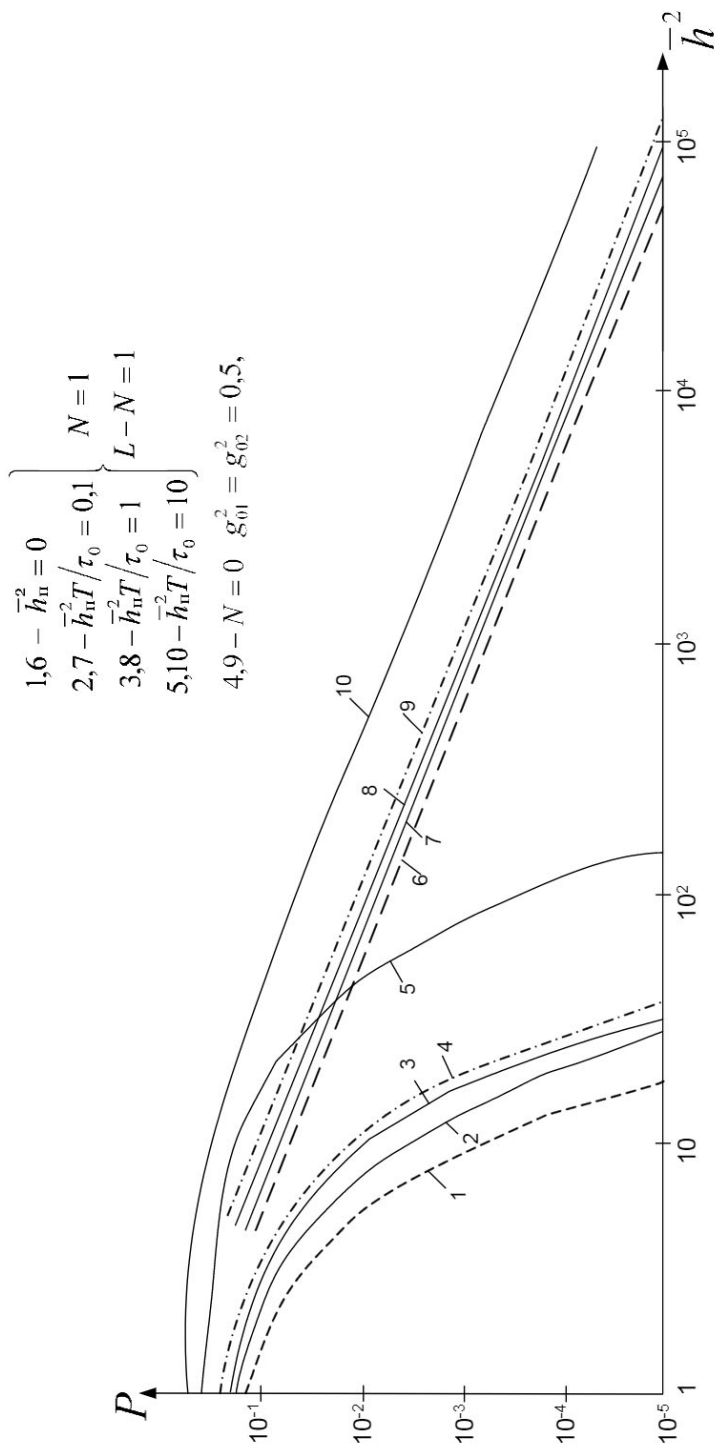


Рисунок 2.4.4- Зависимость $P = f(\bar{h}^2)$ при когерентном приеме
 (экспоненциальная аппроксимация $R_{\Pi}(t_1, t_2)$)

где

$$d^2 = \frac{\mu_p^2}{\mu_\phi^2}, \quad a^2 = 1 + \frac{1}{1+d^2} \left(\frac{\overline{h_3^2}}{2} + t^2 \right). \quad (2.4.44)$$

Внутренний интеграл в (2.4.43) – табличный. После его вычисления и соответствующих преобразований будем иметь следующее выражение для вероятности ошибки [144]

$$p = \frac{\sqrt{b^2-1}}{\pi} e^{-d^2} \int_0^\infty \frac{\exp \frac{d^2}{b^2+t^2}}{(b^2-1+t^2)(b^2+t^2)} dt, \quad (2.4.45)$$

где

$$b^2 = 1 + \overline{h_3^2} / 2(1+d^2).$$

Вычисление вероятности ошибки по (2.4.45) возможно методами численного интегрирования на ЭВМ. Рассмотрим некоторые оценки из (2.4.45). Поскольку в пределах изменения переменной интегрирования в (2.4.45) подынтегральная функция положительна и

$$\exp \frac{d^2}{b^2+t^2} \leq \exp \frac{d^2}{b^2}, \quad (2.4.46)$$

то для вероятности ошибки в (2.4.46) имеет место следующая оценка сверху:

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{\sqrt{b^2-1}}{\pi} \exp \left[- \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) \right] \int_0^\infty \frac{dt}{(b^2-1+t^2)(b^2+t^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[- \frac{(b^2-1)}{b^2} \right] \frac{1}{b^2 + [b^2(b^2-1)]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

где равенство достигается при $d^2 = 0$.

Отсюда после окончательных преобразований в условиях высокой верности приема $\left(\overline{h_3^2} \gg 2(1+d^2) \right)$ получим

$$p \leq \frac{1+d^2}{2\overline{h_3^2}} e^{-d^2}. \quad (2.4.48)$$

Видим, что как и в каналах только с белым шумом наличие регулярной составляющей коэффициента передачи приводит к значительному улучшению помехоустойчивости приема. По мере увеличения размера обучающей выборки N при неизменных параметрах помех, формула (2.4.48) переходит в выражение для вероятности ошибки для вероятности ошибки для каналов с белым шумом в условиях обобщенно-релеевских замираний сигнала.

Аналогично можно найти вероятность ошибки в условиях замираний сигнала, описываемых, например m -распределением Накагами:

$$W(\mu) = \frac{2m^m \mu^{2m-1}}{\Gamma(m)(\mu_0^2)^m} e^{-\frac{m\mu^2}{\mu_0^2}}, \quad \mu \geq 0, \quad (2.4.49)$$

где $\mu_0^2 = \overline{\mu^2}$ и $m \geq \frac{1}{2}$ – параметр, характеризующий замирания в канале.

Подставим в (2.4.35) выражения (2.4.41) и (2.4.49)

$$p = \frac{\sqrt{\overline{h_3^2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{2m^m \mu^{2m-1}}{\Gamma(m)\mu_0^{2m}} e^{-\frac{m\mu^2}{\mu_0^2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \left(\frac{\overline{h_3^2}}{2} + t^2\right)\right]}{\overline{h_3^2}/2 + t^2} dt \right\} d\mu. \quad (2.4.50)$$

После изменения порядка интегрирования в (2.4.50) и вычисления табличных интегралов выражение для вероятности ошибки примет вид

$$p = \frac{1}{2} \frac{m^m (2m-1)!!}{2m!(2m + \overline{h_3^2})^m} {}_2F_1\left(m; \frac{1}{2}; m+1; \frac{2m}{2m + \overline{h_3^2}}\right). \quad (2.4.51)$$

Здесь ${}_2F_1(\alpha; \beta; \gamma; Z)$ – гипергеометрическая функция. При условии $\overline{h_3^2} \gg m$ выражение (2.4.51) упрощается

$$p = \frac{1}{2} \frac{m^m (2m-1)!!}{m!} \frac{1}{(\overline{h_3^2})^m}. \quad (2.4.52)$$

При $m=1$ полученные формулы совпадают с выражениями для вероятностей ошибок в условиях релеевских замираний сигнала.

Таким образом, в условиях замираний сигнала по обобщенному релеевскому закону и m -распределению Накагами имеет место подавление узкополосных помех при приеме с обучением. При быстрых изменениях параметров узкополосных помех подавление помех улучшается с увеличением базы сигналов. При неизменных параметрах помех по мере увеличения размера обучающей выборки N полученные выше формулы для вероятностей ошибок переходят в известные соотношения для каналов с белым шумом.

2.5. Помехоустойчивость одиночного некогерентного приема с обучением по помехам

Прием незамиряющих сигналов. Рассмотрим помехоустойчивость некогерентного приема ортогональных в усиленном смысле сигналов с одинаковыми энергиями, при работе по правилу (2.2.38). Ради простоты будем полагать $N_{II} = 1$. В соответствии с этим алгоритмом вероятность ошибки равна

$$p = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}) dV_1^{(1)} dV_2^{(1)} + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(V_2^{(2)}, V_1^{(2)}) dV_2^{(2)} dV_1^{(2)} \right], \quad (2.5.1)$$

где

$$V_l^{(r)} = \sqrt{\alpha_l^{(r)2} + \eta_l^{(r)2}}; \quad r, l = 1, 2. \quad (2.5.2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_l^{(r)} = \frac{\mu}{\nu^2} X_l^{(r)}, \quad \eta_l^{(r)} = \frac{\mu}{\nu^2} Y_l^{(r)}, \quad (2.5.3)$$

а $X_l^{(r)}$ и $Y_l^{(r)}$ определяются (2.2.20).

Найдем $\alpha_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(r)}$ в общем случае для каналов с изменяющимися параметрами узкополосных помех. Для этого подставим в (2.2.20) $\hat{Z}'(t)$ из (2.4.6) и $\hat{Z}_{II}^{\hat{z}}(t)$ в форме (2.2.22). Составляющие $m_{сш}^{(g)}$ в (2.2.22) определяются соотношениями (2.4.8). Поэтому, после поперiodного усреднения быстроменяющихся функций под знаками интегралов, получим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_r^{(r)} = & \frac{\mu^2 E_c}{\nu^2} \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N} \right) \cos \psi + \frac{\mu}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_r(t) dt + \\
& + \frac{\mu}{\nu^2} x^{mr} \left\{ \frac{N}{N+1} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{cII}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{cII}(t) dt + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{E_{II}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt + \frac{1}{E_{II}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt \right\} + \\
& + \frac{\mu}{\nu^2} y^{mr} \left\{ \frac{N}{N+1} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{sII}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{sII}(t) dt + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{E_{II}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt + \frac{1}{E_{II}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt \right\}. \tag{2.5.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_r^{(r)} = & \frac{\mu^2 E_c}{\nu^2} \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N} \right) \sin \psi + \frac{\mu}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_r(t) dt + \\
& + \frac{\mu}{\nu^2} x^{mr} \left\{ \frac{N}{N+1} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{sII}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{sII}(t) dt + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{E_{II}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt + \frac{1}{E_{II}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt \right\} - \\
& - \frac{\mu}{\nu^2} y^{mr} \left\{ \frac{N}{N+1} \int_{LT}^{(L+1)T} \mu_{cII}(t) dt - \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{T} \int_0^{NT} \mu_{cII}(t) dt + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{E_{II}} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt + \frac{1}{E_{II}} \int_{LT}^{(L+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{II}(t) dt \right\}. \tag{2.5.5}
\end{aligned}$$

Аналогично можно найти $\mathfrak{a}_i^{(r)}$ и $\eta_i^{(r)}$. Они будут отличаться первыми слагаемыми в (2.5.4), (2.5.5).

В общем случае при конечной скорости изменения параметров узкополосных помех, как следует из (2.5.4), (2.5.5), компенсации помех не происходит. Найдем помехоустойчивость приема при релейских замираниях узкополосных помех. При этом $\mu_{cII}^{(\ominus)}$ будут иметь нормальное распределение с нулевым сред-

ним, с дисперсией σ_{Π}^2 и корреляционной функцией (2.4.12). При сделанных допущениях о характере шумов и узкополосных помех $\mathbf{a}_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(r)}$ ($r, l = 1, 2$) являются нормальными случайными величинами со средними значениями, равными

$$\overline{\mathbf{a}_r^{(r)}} = h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N} \right) \cos \psi, \quad \overline{\eta_r^{(r)}} = h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N} \right) \sin \psi,$$

$$\overline{\mathbf{a}_l^{(r)}} = -\frac{h^2}{1+N} (g_{re} \cos \psi - g_{re}^* \sin \psi), \quad (2.5.6)$$

$$\overline{\eta_l^{(r)}} = -\frac{h^2}{1+N} (g_{re} \sin \psi + g_{re}^* \cos \psi)$$

и матрицей ковариаций

$$K = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 \\ 0 & \sigma^2 & -\mathcal{R}_2 & \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{R}_1 & -\mathcal{R}_2 & \sigma^2 & 0 \\ \mathcal{R}_2 & \mathcal{R}_1 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (2.5.7)$$

в которой

$$\sigma^2 = D[\mathbf{a}_r^{(r)}] = D[\eta_r^{(r)}] = D[\mathbf{a}_l^{(r)}] = D[\eta_l^{(r)}] =$$

$$= \frac{h^2}{2} \left[1 + \frac{g_0^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N^2} r_{\Pi} \overline{h_{\Pi}^2} - 1 \right) \right], \quad (2.5.8)$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{h^2}{2} \frac{g_{rl}}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\Pi} \overline{h_{\Pi}^2} - 1 \right), \quad (2.5.9)$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{h^2}{2} \frac{g_{rl}^*}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\Pi} \overline{h_{\Pi}^2} - 1 \right).$$

Здесь обозначено

$$g_{rl} = \frac{1}{E_c E_{II}} \left(x^{(mr)} x^{(ml)} + y^{(mr)} y^{(ml)} \right), \quad (2.5.10)$$

$$g_{rl}^* = \frac{1}{E_c E_{II}} \left(x^{(ml)} y^{(mr)} - x^{(mr)} y^{(ml)} \right). \quad (2.5.11)$$

Четырехмерную плотность вероятностей этих величин можно представить в форме [99, гл. 8]

$$\begin{aligned} W \left[\mathbf{a}_r^{(r)}, \eta_r^{(r)}, \mathbf{a}_l^{(r)}, \eta_l^{(r)} / \psi \right] &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma^4 (1 - \mathcal{R}_0^2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 (1 - \mathcal{R}_0^2)} \times \right. \\ &\times \left[\left(\mathbf{a}_r^{(r)} - u_0 \cos \psi \right)^2 + \left(\eta_r^{(r)} - u_0 \sin \psi \right)^2 + \left(\mathbf{a}_l^{(r)} - u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\eta_l^{(r)} - u_1 \sin \psi - u_2 \cos \psi \right)^2 - \frac{2\mathcal{R}_1}{\sigma^2} \left(\mathbf{a}_r^{(r)} - u_0 \cos \psi \right) \left(\mathbf{a}_l^{(r)} - u_1 \cos \psi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. u_2 \sin \psi \right) - \frac{2\mathcal{R}_1}{\sigma^2} \left(\eta_r^{(r)} - u_0 \sin \psi \right) \left(\eta_l^{(r)} - u_1 \sin \psi - u_2 \cos \psi \right) - \right. \\ &- \frac{2\mathcal{R}_2}{\sigma^2} \left(\mathbf{a}_l^{(r)} - u_1 \cos \psi \right) \left(\eta_l^{(r)} - u_1 \sin \psi - u_2 \cos \psi \right) + \frac{2\mathcal{R}_2}{\sigma^2} \left(\eta_r^{(r)} - u_0 \sin \psi \right) \times \\ &\left. \left. \times \left(\mathbf{a}_l^{(r)} - u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi \right) \right] \right\}, \quad (2.5.12) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R}_0^2 = \frac{\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2}{\sigma^4}; \quad u_0 = h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1 + N} \right); \quad (2.5.13)$$

$$u_1 = -\frac{h^2}{1 + N} g_{rl}, \quad u_2 = -\frac{h^2}{1 + N} g_{rl}^*. \quad (2.5.14)$$

При произвольных сигналах и произвольных N найти точное аналитическое выражение для вероятности ошибки не представляется возможным. Поэтому рассмотрим два практически интересных случая. В первом случае N произвольно, а используемые сигналы имеют неперекрывающиеся спектры. Именно в этом случае представляется возможным эффективно обучаться по по-

мемам на интервалах между рабочими посылками сигналов. Во втором случае сигналы могут быть как с перекрывающимися, так и с неперекрывающимися спектрами, но $N = 0$, т. е. формирование оценок помех происходит на интервале решения.

В первом случае матрица (2.5.7) диагональна ($\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0$; $g_{rl} = g_{rl}^* = 0$; $\overline{\mathbf{a}}_l^{(r)} = \overline{\eta}_l^{(r)} = 0$). При этом плотность вероятностей огибающих имеет вид

$$W\left(V_r^{(r)}; V_l^{(r)}\right) = \frac{V_r^{(r)} V_l^{(r)}}{\sigma^4} \exp\left[-\frac{V_r^{(r)} + V_l^{(r)} + \overline{V}_r^{(r)}}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{V_r^{(r)} \overline{V}_r^{(r)}}{\sigma^2}\right). \quad (2.5.15)$$

После подстановки (2.5.15) в (2.5.1) и интегрирования вероятность ошибки будет равна

$$p = \frac{1}{2} e^{-\frac{h_s^2}{2}}, \quad (2.5.16)$$

где

$$h_s^2 = \frac{(\overline{V}_r^{(r)})^2}{2\sigma^2} = \frac{h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N}\right)^2}{1 + \frac{g_0^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\Pi} \overline{h}_{\Pi}^2 - 1\right)}. \quad (2.5.17)$$

Выражение (2.5.17) показывает, что и при некогерентном приеме вероятность ошибки в общем случае зависит от величины отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума (h^2), от коэффициентов g_0^2 , характеризующих различимость сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области, от отношения энергии узкополосных помех к спектральной плотности мощности шума (\overline{h}_{Π}^2), от коэффициентов r_{Π} , характеризующих скорость изменения параметров помех и от размера обучающей выборки N . Из (2.5.17) видно, что вероятность ошибки в двух случаях не зависит от мощности узкополосных помех. Во-первых, при неизменных параметрах помех ($r_{\Pi} = 0$). Тогда

$$h_s^2 = h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N}\right) \quad (2.5.18)$$

и по мере увеличения объема обучающей выборки N узкополосные помехи определяются все точнее и в пределе полностью компенсируются. Практически при $N=3$ энергетический проигрыш от действия узкополосных помех составляет 1,2 дБ по сравнению с каналом только с белым шумом. Во-вторых, при $N=0$, т. е. при формировании оценок помех непосредственно на интервале решения. В этом случае

$$h_3^2 = h^2(1 - g_0^2) \quad (2.5.19)$$

вероятность ошибки не зависит ни от интенсивности, ни от скорости изменения параметров помех, но необходима избыточность по сигналу ($g_0^2 < 1$).

Во втором случае представляется возможным получить относительно простое выражение для вероятности ошибки и для сигналов с перекрывающимися спектрами. Для этого, заменив в (2.5.12) переменные

$$\begin{aligned} \alpha_r^{(r)} &= V_r^{(r)} \cos \Theta_1, \quad \eta_r^{(r)} = V_r^{(r)} \sin \Theta_1, \\ \alpha_l^{(r)} &= V_l^{(r)} \cos \Theta_2, \quad \eta_l^{(r)} = V_l^{(r)} \sin \Theta_2 \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

и обозначив $\varphi_1 = \Theta_1 - \psi$, $\varphi_2 = \Theta_1 - \Theta_2 - \arctg(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$, получим четырехмерную плотность вероятности, не зависящую от ψ . Проинтегрировав ее по $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ и $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$, найдем двумерную плотность вероятностей огибающих [144, гл. 3]:

$$\begin{aligned} W(V_r^{(r)}; V_l^{(r)}) &= \frac{V_r^{(r)} V_l^{(r)}}{\sigma^4 (1 - \mathcal{R}_0^2)} \exp \left[-h_3^2 - \frac{V_r^{(r)2} + V_l^{(r)2}}{2\sigma^2 (1 - \mathcal{R}_0^2)} \right] \times \\ &\times I_0 \left(\frac{\mathcal{R}_0 V_r^{(r)} V_l^{(r)}}{\sigma^2 (1 - \mathcal{R}_0^2)} \right) I_0(V_r^{(r)}). \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

После подстановки (2.5.21) в (2.5.1) и интегрирования получим вероятность ошибки в виде:

$$p = \frac{1}{2} e^{-\frac{h_3^2}{2}} \left[I_0 \left(\mathcal{R}_0 \frac{h_3^2}{2} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mathcal{R}_0^2}}{1 + \sqrt{1 - \mathcal{R}_0^2}} \right)^{\frac{k}{2}} I_k \left(\mathcal{R}_0 \frac{h_3^2}{2} \right) \right], \quad (2.5.22)$$

где $I_k(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя k -го порядка; h_3^2 определяется (2.5.19).

При $\mathcal{R}_0 = 0$ из (2.5.22) следует формула (2.5.16) с учетом (2.5.19) для сигналов с неперекрывающимися спектрами.

Характер полученных зависимостей здесь аналогичен кривым 1–5 на рис. 2.4.3 и 2.4.4 с учетом сдвига кривых вправо по оси абсцисс приблизительно на 1 дБ при $p \leq 10^{-3}$.

Прием замирающих сигналов. В условиях замираний сигналов вероятность ошибки найдем усреднением $p(h^2)$ в соответствии с распределением h^2 . Рассмотрим случай релейских замираний сигналов. Для этого усредним (2.5.16) в соответствии с (2.4.36), получим

$$p = \frac{1}{h_3^2 + 2} \cong \frac{1 + \frac{g_0^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} \overline{h_{II}^2} r_{II} - 1 \right)}{h^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{1+N} \right)^2}, \quad (2.5.23)$$

где $\overline{h_3^2}$ – среднестатистическое значение h^2 , определяется (2.4.38).

После усреднения (2.5.22) по Релею вероятность ошибки определится выражением

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\overline{h_3^2} \sqrt{1 - \mathcal{R}_0^2}}{\sqrt{\left(\overline{h_3^2} + 2 \right)^2 - \left(\overline{h_3^2} \right)^2 \mathcal{R}_0^2}} \right] \approx \frac{1}{\overline{h_3^2} (1 - \mathcal{R}_0^2)}. \quad (2.5.24)$$

Здесь $\overline{h_3^2}$ определяется (2.5.19) при замене h^2 на среднестатистическое $\overline{h^2}$.

Приведенные выражения позволяют сделать выводы о возможностях подавления узкополосных помех в условиях замираний сигналов, аналогичные приведенным выше для незамирающих сигналов. В каналах с неизменными параметрами узкополосных помех по мере увеличения объема обучающей выборки N формула (2.5.23) сходится к известной для замирающих по Релею сигналов в белом шуме. При $N = 0$ приемник инвариантен к интенсивности узкополосных помех и скорости изменения их параметров.

Для определения вероятности ошибки в условиях обобщенных релейских замираний сигнала усредним выражение (2.5.16) в соответствии с (2.4.40)

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\mu^2 \overline{h_3^2}}{2\mu^2}\right) \frac{2\mu}{\mu_{\phi}^2} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \mu_p^2}{\mu_{\phi}^2}\right) I_0\left(\frac{2\mu\mu_p}{\mu_{\phi}^2}\right) d\mu = \\
&= \frac{1 + d^2}{2(1 + d^2) + \overline{h_3^2}} \exp\left[-\frac{d^2 \overline{h_3^2}}{2(1 + d^2) + \overline{h_3^2}}\right]. \quad (2.5.25)
\end{aligned}$$

Здесь $d^2 = \mu_p^2 / \mu_{\phi}^2$; $\overline{h_3^2}$ определяется (2.5.17) при замене h^2 на среднестатистическое $\overline{h^2}$. При $d=0$ из (2.5.25) следует формула (2.5.23) для релейских замираний. С ростом d^2 вероятность ошибки стремится к (2.5.16) для канала с постоянными параметрами.

В условиях замираний сигнала, удовлетворяющих m -распределению Накагами вероятность ошибки найдем усреднением (2.5.16) по $W(\mu)$ из (2.4.49)

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\mu^2 \overline{h_3^2}}{2\mu^2}\right) \frac{2m^m \mu^{2m-1}}{\Gamma(m) (\overline{\mu^2})^m} e^{-\frac{m\mu^2}{\mu^2}} d\mu = \frac{2^{m-1} m^m}{(\overline{h_3^2} + 2m)^m}. \quad (2.5.26)
\end{aligned}$$

Как видно из (2.5.25), (2.5.26) имеет место подавление узкополосных помех при некогерентном приеме в условиях обобщенных релейских замираний сигналов, а также замираний типа m -распределения.

Далее проанализируем помехоустойчивость приема по правилу (2.2.41), оптимальному в условиях релейских замираний сигнала. Для простоты по-прежнему будем полагать $N_{II} = 1$.

Вероятность ошибки определим по формуле (2.4.4), в которой

$$\mathfrak{a}^{(r)} = \chi_1^{(r)2} + \eta_1^{(r)2} - \chi_2^{(r)2} - \eta_2^{(r)2}, \quad (2.5.27)$$

$$\begin{aligned}
\chi_l^{(r)2} &= \frac{2\overline{h^2} X_l^{(r)2}}{\nu^2 E_c (1 + \overline{h^2} B_l)}, \quad \eta_l^{(r)2} = \frac{2\overline{h^2} Y_l^{(r)2}}{\nu^2 E_c (1 + \overline{h^2} B_l)}; \\
r, l &= 1, 2; \quad (2.5.28)
\end{aligned}$$

$$A = 2 \ln \frac{1 + \overline{h^2} B_r}{1 + \overline{h^2} B_l} - \text{пороговый уровень.}$$

При релейских замираниях узкополосных помех $\chi_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(r)}$ являются нормальными случайными величинами с нулевыми средними и матрицей ковариаций

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{\chi_1^{(r)2}} & 0 & \overline{\chi_1^{(r)}\chi_2^{(r)}} & \overline{\chi_1^{(r)}\eta_1^{(r)}} \\ 0 & \overline{\eta_1^{(r)2}} & \overline{\eta_1^{(r)}\chi_2^{(r)}} & \overline{\eta_1^{(r)}\eta_2^{(r)}} \\ \overline{\chi_1^{(r)}\chi_2^{(r)}} & \overline{\eta_1^{(r)}\chi_2^{(r)}} & \overline{\chi_2^{(r)2}} & 0 \\ \overline{\chi_1^{(r)}\eta_2^{(r)}} & \overline{\eta_1^{(r)}\eta_2^{(r)}} & 0 & \overline{\eta_2^{(r)2}} \end{bmatrix}. \quad (2.5.29)$$

Плотность вероятности квадратичной формы $\mathbf{a}^{(r)}$ (2.5.27) определяется известными соотношениями [203]

$$W(\mathbf{a}^{(r)}) = \begin{cases} \frac{1}{2(\gamma^{(r)} + \beta^{(r)})} \exp\left(-\frac{\mathbf{a}^{(r)}}{2\gamma^{(r)}}\right), & \mathbf{a}^{(r)} > 0, \\ \frac{1}{2(\gamma^{(r)} + \beta^{(r)})} \exp\left(-\frac{|\mathbf{a}^{(r)}|}{2\beta^{(r)}}\right), & \mathbf{a}^{(r)} < 0, \end{cases} \quad (2.5.30)$$

Здесь $\gamma_1^{(r)} = \lambda_1^{(r)}$, $\beta^{(r)} = -\lambda_2^{(r)}$, где $\lambda_1^{(r)}$ и $\lambda_2^{(r)}$ – собственные числа матрицы $[\mathbf{KJ}]$; \mathbf{J} – матрица квадратичной формы $\mathbf{a}^{(r)}$. Решение характеристического уравнения $|\mathbf{KJ} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ дает следующие выражения для $\gamma^{(r)}$ и $\beta^{(r)}$:

$$\gamma^{(r)} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\overline{\chi_1^{(r)2}} + \overline{\chi_2^{(r)2}}\right)^2 - 4\overline{\chi_1^{(r)}\chi_2^{(r)}}} + \overline{\chi_1^{(r)2}} - \overline{\chi_2^{(r)2}} \right], \quad (2.5.31)$$

$$\beta^{(r)} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\overline{\chi_1^{(r)2}} + \overline{\chi_2^{(r)2}}\right)^2 - 4\overline{\chi_1^{(r)}\chi_2^{(r)}}} - \overline{\chi_1^{(r)2}} + \overline{\chi_2^{(r)2}} \right],$$

где

$$\overline{\chi_r^{(r)2}} = \frac{\bar{h}^2}{1 + \bar{h}^2 B_r} \left[\bar{h}^2 \left(1 - \frac{g_{0r}^2}{1 + N} \right)^2 + 1 + \frac{g_{0r}^2}{1 + N} \left(\frac{N^2}{1 + N} \bar{h}_n^2 r_n - 1 \right) \right],$$

$$\overline{\chi_l^{(r)2}} = \frac{\bar{h}^2}{1 + \bar{h}^2 B_l} \left[\bar{h}^2 \frac{g_{0r}^2 g_{0l}^2}{(1+N)^2} + 1 + \frac{g_{0l}^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} \bar{h}_n^2 r_n - 1 \right) \right],$$

$$\overline{\chi^{(r)}} = \left(\overline{\chi_r^{(r)} \chi_l^{(r)}} \right)^2 + \left(\overline{\chi_r^{(r)} \eta_l^{(r)}} \right)^2 = \frac{(\bar{h}^2)^2 g_{0r}^2 g_{0l}^2}{(1 + \bar{h}^2 B_r)(1 + \bar{h}^2 B_l)(1+N)^2} \times$$

$$\times \left[1 + \bar{h}^2 \left(1 - \frac{g_{0r}^2}{1+N} \right) - \left(\frac{N^2}{1+N} \bar{h}_n^2 r_n \right) \right]^2.$$

(2.5.32)

После подстановки (2.5.30) в (2.4.4) вероятность ошибки будет

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)} + \beta^{(1)}} + \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(1)} + \beta^{(1)}} \left(1 - e^{-\frac{A}{2\gamma^{(1)}}} \right) + \frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(2)} + \beta^{(2)}} e^{-\frac{A}{2\gamma^{(2)}}} \right], & A > 0, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)} + \beta^{(1)}} + \frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(2)} + \beta^{(2)}} \right], & A = 0, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)} + \beta^{(1)}} e^{-\frac{|A|}{2\beta^{(1)}}} + \frac{\beta^{(2)}}{\gamma^{(2)} + \beta^{(2)}} \left(1 - e^{-\frac{|A|}{2\beta^{(2)}}} \right) + \frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(2)} + \beta^{(2)}} \right], & A < 0, \end{cases}$$

(2.5.33)

С помощью этих выражений с учетом (2.5.31), (2.5.32) можно рассчитать вероятность ошибочного приема в каждом конкретном случае. В частности, при симметричном поражении обоих вариантов сигналов узкополосными помехами ($g_{01} = g_{02} = g_0$), вероятность ошибки определится формулой:

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\bar{h}^2 \left(1 - \frac{2g_0^2}{1+N} \right)}{\sqrt{(\bar{h}^2 + 2) \left[\left(1 - 2 \frac{g_0^2}{1+N} \right) \left(\bar{h}^2 \left(1 - 2 \frac{g_0^2}{1+N} \right) + 2 \right) + 4 \frac{N^2}{(1+N)^2} g_0^2 \bar{h}_n^2 r_n \right]}} \right\}$$

(2.5.34)

При $\overline{h^2} \left(1 - \frac{2g_0^2}{1+N} \right) \gg 1$ из (2.5.34) следует приближенное соотношение

$$p \approx \frac{1 + \frac{g_0^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} \overline{h_{II}^2} r_{II} - 1 \right)}{\overline{h^2} \left(1 - 2 \frac{g_0^2}{1+N} \right)^2}. \quad (2.5.35)$$

Из (2.5.34), (2.5.35) видно, что при конечной скорости изменения параметров узкополосных помех $r_{II} \neq 0$ вероятность ошибки зависит от интенсивности помех $\overline{h_{II}^2}$ и размера обучающей выборки N . Поэтому в условиях действия мощных узкополосных помех, параметры которых меняются достаточно быстро $\overline{h_{II}^2} r_{II} > 1$, может оказаться целесообразным вести обучение по помехам на интервале решения, т. е. брать $N = 0$.

В случае сигналов с неперекрывающимися спектрами ($g_{12} = g_{21} = 0$), когда оба варианта сигнала поражены узкополосными помехами одинаковой интенсивности, ковариантная матрица (2.5.29) становится диагональной и вычисление вероятности ошибки ведется по формуле (2.5.23). Сравнивая ее с (2.5.35) видим, что при использовании сигналов с неперекрывающимися спектрами, при $N = 0$ требуется меньшая избыточность по сигналу, т. к. необходимо выполнение условия $g_0^2 < 1$, а не $2g_0^2 < 1$.

Характер полученных зависимостей для вероятностей ошибок здесь такой же, как у кривых 6–10 на рис. 2.4.3 и 2.4.4 с учетом сдвига кривых по оси абсцисс на 3 дБ.

2.6. Адаптивные алгоритмы одиночного приема при марковских изменениях параметров узкополосных помех

В параграфе 2.2 синтезированы адаптивные алгоритмы приема в предположении неизменности параметров узкополосных помех на интервале измерения и использования измеренных значений. В данном параграфе рассмотрим возможности построения адаптивного приемника в каналах с изменяющимися параметрами узкополосных помех.

Определим структуру адаптивного приемника с обучением по узкополосным помехам для случая, когда допустимо считать параметры узкополосных помех неизменными на интервале длительности элемента сигнала и меняющимися скачком на границе элемента сигнала. Будем полагать, что последовательность ортогональных составляющих параметров i -и узкополосной помехи

$\mu_{spi}^{(1)}, \dots, \mu_{spi}^{(N)}$ образует цепь Маркова с плотностью вероятностей перехода

$$W\left(\mu_{spi}^{(k+1)} / \mu_{spi}^{(k)}\right).$$

Как и в параграфе 2.2 обучение по узкополосной помехе ведется на интервале времени от 0 до NT , после чего ведется прием с использованием результатов измерений параметров помех.

Найдем апостериорное распределение параметров помех. Совместное распределение вероятностей элементов обучающей выборки и параметров i -ой узкополосной помехи с учетом марковских свойств последних определяется выражением [162]:

$$\begin{aligned} W_{Ni} \left(\mu_{spi}^{(1)}, \dots, \mu_{spi}^{(N)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}^{(N)} \right) &= \\ &= \mathcal{F}_{Ni} \left(\mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{spi} \right) \prod_{k=1}^{N-1} W \left(\mu_{spi}^{(k+1)} / \mu_{spi}^{(k)} \right) W \left(\mu_{spi}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

где $\mathcal{F}_{Ni} \left(\mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{spi} \right)$ функционал отношения правдоподобия обучающей выборки помехи (2.2.9).

Будем полагать начальное распределение параметров помех $W \left(\mu_{spi}^{(1)} \right)$ равномерным. При больших интервалах наблюдения (N велико) или при больших значениях отношения энергии узкополосных помех к спектральной плотности мощности шума, влияние этого распределения не существенно, поэтому его можно выбрать из соображений наибольшей простоты последующих вычислений [153].

Апостериорное распределение параметров i -ой помехи в соответствии с формулой Байеса будет равно

$$W_{Ni} \left(\mu_{spi}^{(1)}, \dots, \mu_{spi}^{(N)} / \mathfrak{x}^{(N)} \right) = const \mathcal{F}_{Ni} \left(\mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{spi} \right) \prod_{k=1}^{N-1} W \left(\mu_{spi}^{(k+1)} / \mu_{spi}^{(k)} \right). \quad (2.6.2)$$

Постоянный множитель в правой части (2.6.2) включает в себя и совместную плотность $W\left(\mathfrak{x}^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}^{(N)}\right)$, не зависящую явно от μ_{cpi} .

Интересующая нас апостериорная плотность вероятностей на N -м этапе наблюдения получается из (2.6.2) $(N-1)$ -кратным интегрированием по $\mu_{cpi}^{(1)}, \dots, \mu_{cpi}^{(N-1)}$:

$$W_{Ni} \left(\mu_{cpi}^{(N)} / \mathfrak{x}^{(N)} \right) = \int \dots \int W_{Ni} \left(\mu_{cpi}^{(1)}, \dots, \mu_{cpi}^{(N)} / \mathfrak{x}^{(N)} \right) d\mu_{cpi}^{(1)} \dots d\mu_{cpi}^{(N-1)}. \quad (2.6.3)$$

При поступлении нового наблюдения $\mathfrak{x}^{(N+1)}$ плотность (2.6.3) преобразуется следующим образом:

$$W_{(N+1)i} \left(\mu_{cpi}^{(N+1)} / \mathfrak{x}^{(N+1)} \right) = const \mathcal{F}_{(N+1)i} \left(\mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{cpi} \right) \times \\ \times \int W \left(\mu_{cpi}^{(N+1)} / \mu_{cpi}^{(N)} \right) W_{Ni} \left(\mu_{cpi}^{(N)} / \mathfrak{x}^{(N)} \right) d\mu_{cpi}^{(N)}. \quad (2.6.4)$$

Это равенство определяет основной рекуррентный алгоритм для нахождения апостериорной плотности вероятностей параметров i -ой помехи.

Путем подстановки выражения (2.6.4) в (2.2.11), а затем результирующего апостериорного распределения для N_{II} помех в (2.2.6) и интегрирования можно найти решающее правило в каждом конкретном случае.

Если переходная плотность вероятностей неизвестна, можно использовать аппроксимирующую из экспоненциального семейства [153,155]

$$W \left(\mu_{cpi}^{(k+1)} / \mu_{cpi}^{(k)}, \beta \right) = \exp \left\{ -\Gamma(\beta) + \beta^T \varphi \left(\mu_{cpi}^{(k+1)}, \mu_{cpi}^{(k)} \right) \right\}, \quad (2.6.5)$$

где β^T – вектор-столбец неизвестных параметров β_1, \dots, β_n (T – знак транспонирования);

$\varphi \left(\mu_{cpi}^{(k+1)}, \mu_{cpi}^{(k)} \right)$ – n -мерный вектор-столбец известных функций двух переменных;

$\Gamma(\beta)$ – нормирующая функция.

С помощью апостериорного распределения вероятностей (2.6.4) параметры аппроксимирующего распределения (2.6.5) могут быть найдены методами, изложенными в [130, 155, 209, 214].

Для практических целей в условиях высокой точности измерения параметров помех $(2\sigma_m^2 E_m / \nu^2 \gg 1)$ достаточно ограничиться гауссовым приближением в (2.6.4). Тогда целесообразна аппроксимация переходной плотности вероятностей формулой [91, 151]

$$W\left(\mu_{cni}^{(N+1)} / \mu_{cni}^{(N)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ni}^2(1-R_{ni}^2)}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{\mu_{cni}^{(N+1)}}{s} - \frac{\mu_{cni}^{(N)} R_{ni}}{s}\right)^2}{2\sigma_{ni}^2(1-R_{ni}^2)}\right]. \quad (2.6.6)$$

После подстановки $\mathcal{F}_{Ni}\left(\mathfrak{x}^{(N)} / \mu_{cni}^{(N)}\right)$ из (2.2.9) и (2.6.6) в (2.6.4) получим апостериорную плотность вероятностей на N -м этапе

$$W_{Ni}\left(\mu_{cni}^{(N)}, \mu_{sni}^{(N)} / \mathfrak{x}^{(N)}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Ni}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{Ni}^2} \left[\left(\mu_{cni} - m_{cni}^{(N)}\right)^2 + \left(\mu_{sni} - m_{sni}^{(N)}\right)^2 \right]\right\}, \quad (2.6.7)$$

параметры которой определяются рекуррентными соотношениями

$$m_{cni}^{(N)} = \frac{m_{cni}^{(N-1)} \sigma_{ni}^2 R_{ni} + \hat{\mu}_{cni}^{(N)} \left[\sigma_{(N-1)i}^2 R_{ni}^2 + \sigma_{ni}^2 (1-R_{ni}^2) \right]}{\hat{\sigma}_{ni}^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_{ni}^2 + \sigma_{ni}^2 (1-R_{ni}^2)}, \quad (2.6.8)$$

$$\sigma_{Ni}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{mi}^2 \left[\sigma_{(N-1)i}^2 R_{mi}^2 + \sigma_{mi}^2 (1 - R_{mi}^2) \right]}{\hat{\sigma}_{mi}^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_{mi}^2 + \sigma_{mi}^2 (1 - R_{mi}^2)}. \quad (2.6.9)$$

Оценки $\hat{\mu}_{спi}^{(k)}$ определяются формулами (2.2.10).

Начальные условия

$$m_{спi}^{(1)} = \hat{\mu}_{спi}^{(1)}; \quad \sigma_{1i}^2 = \hat{\sigma}_{mi}^2. \quad (2.6.10)$$

Из (2.6.8), (2.6.9) следуют частные случаи.

1. В каналах с неизменными параметрами узкополосных помех ($R_{mi} = 1$)

$$m_{спi}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{спi}^{(k)}, \quad \sigma_{Ni}^2 = \hat{\sigma}_{mi}^2 / N, \quad (2.6.11)$$

что совпадает с (2.2.17), (2.2.18).

2. В каналах с относительно быстрыми изменениями параметров узкополосных помех ($R_{mi} \ll 1$)

$$m_{спi}^{(N)} = \frac{\hat{\mu}_{спi}^{(N)} \overline{h_{mi}^2}}{1 + \overline{h_{mi}^2}}, \quad \sigma_{Ni}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{mi}^2 \overline{h_{mi}^2}}{1 + \overline{h_{mi}^2}}. \quad (2.6.12)$$

Как видим, в этом случае формирование оценок происходит независимо на каждом этапе наблюдения.

После подстановки (2.6.7) в (2.2.11) и последующего усреднения в выражении (2.2.6) получим адаптивные алгоритмы приема с обучением по узкополосным помехам при различных предположениях о статистических характеристиках параметров сигнала в форме, аналогичной (2.2.19) – для когерентного приема, (2.2.36) – для некогерентного приема, (2.2.41) – для замирающего по Релею сигнала. Другими в этих формулах будут только выражения для оценки совокупности узкополосных помех $\hat{\mathcal{Z}}_{\pi}(t)$ (2.2.22) и коэффициента B_r (2.2.25), характеризующего пороговый уровень. В данном случае марковских изменений параметров помех они будут равны

$$\hat{\tilde{Z}}_{II}(t) = \sum_{i=1}^{N_{II}} \left[\frac{m_{c\pi i}^{(N)} + \frac{\sigma_{Ni}^2 x_i^{(\pi)}}{\hat{\sigma}_{\pi i}^2 E_{\pi i}}}{1 + \frac{\sigma_{Ni}^2}{\hat{\sigma}_{\pi i}^2}} Z_{\pi i}(t) + \frac{m_{s\pi i}^{(N)} + \frac{\sigma_{\pi i}^2 y_i^{(\pi)}}{\hat{\sigma}_{\pi i}^2 E_{\pi i}}}{1 + \frac{\sigma_{Ni}^2}{\hat{\sigma}_{\pi i}^2}} \tilde{Z}_{\pi i}(t) \right], \quad (2.6.13)$$

$$B_r = 1 - \sum_{i=1}^{N_{II}} \frac{g_{0ri}^2}{1 + \frac{\hat{\sigma}_{\pi i}^2}{\sigma_{Ni}^2}}. \quad (2.6.14)$$

Здесь $x_i^{(\pi)}$ и $y_i^{(\pi)}$ определяются формулами (2.2.23).

Из анализа (2.2.19), (2.2.36), (2.2.41) видно, что структура адаптивных алгоритмов на всех этапах наблюдения остается неизменной, меняются только параметры блоков вычисления оценок помех и пороговых уровней в соответствии с выражениями (2.6.13), (2.6.14). В каналах с конечной скоростью изменения параметров помех ($R_{\pi i} < 1$) алгоритм формирования оценок и пороговых уровней зависит от мощности узкополосных помех и величины коэффициента корреляции помех $R_{\pi i}$. Формулы (2.6.8), (2.6.9) иллюстрируют эту зависимость. Из них в частности видно, что устаревшие данные наблюдений используются с меньшим весом по сравнению с вновь полученными на последнем этапе наблюдения. Эта разница тем заметнее, чем больше скорость изменения параметров и мощность помех.

Из (2.6.13) видно, что в общем случае формирование оценки совокупности узкополосных помех происходит как на интервале времени, предшествующем интервалу решения (с помощью классифицированной обучающей выборки помех), так и непосредственно на интервале решения (2.2.23) (с помощью неклассифицированной реализации принятой смеси). В частном случае каналов с неизменными параметрами узкополосных помех ($R_{\pi i} = 1$), когда справедливы выражения (2.6.11), при $N \gg 1$ из (2.6.13) для оценки i -й помехи следует

$$\hat{\tilde{Z}}_{\pi i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{c\pi i}^{(k)} Z_{\pi i}(t) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{s\pi i}^{(k)} \tilde{Z}_{\pi i}(t). \quad (2.6.15)$$

Получаем алгоритмы, построенные на принципе замены неизвестных параметров узкополосных помех их оценками.

Для каналов с неизменными параметрами помех, как уже отмечалось ранее, формирование оценки совокупности узкополосных помех может производиться

с помощью классифицированной обучающей выборки помех на интервале, предшествующем интервалу решения. При этом принципиально не нужна избыточность по сигналу для подавления узкополосных помех. Можно показать, что по мере увеличения размера обучающей выборки параметры узкополосных помех определяются все точнее и в пределе происходит полное подавление узкополосных помех, а алгоритмы (2.2.19), (2.2.36), (2.2.41) переходят в оптимальные решающие правила для каналов с белым шумом. Поэтому полученные алгоритмы названы асимптотически оптимальными.

В каналах с относительно быстрыми изменениями параметров узкополосных помех ($R_{ni} \ll 1$), когда формирование оценок происходит независимо на каждом этапе наблюдения, целесообразно использовать оценки, сформированные только на интервале решения в виде

$$\hat{Z}_{ni}(t) = \frac{x_i^{(n)}}{E_{ni}} \frac{\overline{h_{ni}^2}}{1 + \overline{h_{ni}^2}} Z_{ni}(t) + \frac{y_i^{(n)}}{E_{ni}} \frac{\overline{h_{ni}^2}}{1 + \overline{h_{ni}^2}} \tilde{Z}_{ni}(t), \quad (2.6.16)$$

или при $\overline{h_{ni}^2} \gg 1$

$$\hat{Z}_{ni}(t) = \frac{x_i^{(n)}}{E_{ni}} Z_{ni}(t) + \frac{y_i^{(n)}}{E_{ni}} \tilde{Z}_{ni}(t).$$

При этом сигнал должен быть с избыточностью, т. к. возможна режекция составляющих сигнала, совпадающих по частоте с узкополосными помехами.

Можно показать, что полученные здесь алгоритмы состоятельны.

2.7. Помехоустойчивость приема при марковских изменениях параметров узкополосных помех

Когерентный прием. Проведем анализ помехоустойчивости приема двоичных сигналов с активной паузой по правилу (2.2.19), в котором оценка совокупности узкополосных помех определяется выражением:

$$\hat{Z}_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n} \hat{Z}_{ni}(t) = \sum_{i=1}^{N_n} \left[m_{cni}^{(\ominus)} Z_{ni}(t) + m_{sni}^{(\ominus)} \tilde{Z}_{ni}(t) \right], \quad (2.7.1)$$

где

$$m_{cni}^{(\ominus)} = a_i \hat{\mu}_{cni}^{(N)} + b_i m_{cni}^{(N-1)}, \quad m_{sni}^{(\ominus)} = a_i \hat{\mu}_{sni}^{(N)} + b_i m_{sni}^{(N-1)}. \quad (2.7.2)$$

Здесь

$$a_i = \frac{\sigma_{(N-1)i}^2 R_{\Pi i}^2 + \sigma_{\Pi i}^2 (1 - R_{\Pi i}^2)}{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_{\Pi i}^2 + \sigma_{\Pi i}^2 (1 - R_{\Pi i}^2)},$$

$$b_i = \frac{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2 R_{\Pi i}^2}{\hat{\sigma}_{\Pi i}^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_{\Pi i}^2 + \sigma_{\Pi i}^2 (1 - R_{\Pi i}^2)}. \quad (2.7.3)$$

Чтобы выяснить закономерности поведения системы и избежать излишних усложнений при анализе помехоустойчивости, рассмотрим случай формирования оценок $\hat{\mu}_{c\Pi i}^{(N)}$ и $\hat{\mu}_{s\Pi i}^{(N)}$ в (2.7.2) на интервале решения по неклассифицированной принятой смеси сигнала с помехами

$$\hat{\mu}_{c\Pi i}^{(N)} = \hat{\mu}_{c\Pi i}^{(L)} = \frac{1}{E_{\Pi i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'(t) \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) dt,$$

$$\hat{\mu}_{s\Pi i}^{(N)} = \hat{\mu}_{s\Pi i}^{(L)} = \frac{1}{E_{\Pi i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) dt, \quad (2.7.4)$$

а формирование оценок $m_{c\Pi i}^{(N-1)}$ и $m_{s\Pi i}^{(N-1)}$ на предшествующем интервале по классифицированной реализации помех

$$m_{c\Pi i}^{(N-1)} = \hat{\mu}_{c\Pi i}^{(L-1)} = \frac{1}{E_{\Pi i}} \int_{(L-1)T}^{LT} \mathcal{X}(t) \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) dt,$$

$$m_{s\Pi i}^{(N-1)} = \hat{\mu}_{s\Pi i}^{(L-1)} = \frac{1}{E_{\Pi i}} \int_{(L-1)T}^{LT} \mathcal{X}(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) dt. \quad (2.7.5)$$

Учитывая начальные условия (2.6.10), при которых $\sigma_{(N-1)i}^2 = \hat{\sigma}_{\Pi i}^2$, соотношения (2.7.3) примут вид

$$a_i = \frac{R_{\Pi i}^2 + \overline{h_{\Pi i}^2} (1 - R_{\Pi i}^2)}{1 + R_{\Pi i}^2 + \overline{h_{\Pi i}^2} (1 - R_{\Pi i}^2)}, \quad b_i = \frac{R_{\Pi i}^2}{1 + R_{\Pi i}^2 + \overline{h_{\Pi i}^2} (1 - R_{\Pi i}^2)}. \quad (2.7.6)$$

Выражения (2.7.6) хорошо иллюстрируют изменения весовых коэффициентов, с которыми входят оценки (2.7.4) и (2.7.5) в результирующую формулу (2.7.2), в зависимости от скорости изменения параметров ($R_{\text{ш}i}$) и мощности помех ($\overline{h_{\text{ш}i}^2}$). В частности видно, что при $R_{\text{ш}i} \ll 1$ и больших $\overline{h_{\text{ш}i}^2}$ роль оценки, сформированной на предшествующем интервале не существенна $b_i \ll 1$. Поэтому ухудшения помехоустойчивости из-за декорреляции параметров помех не будет.

Вероятность ошибки найдем по формуле (2.4.4), в которой $\mathfrak{a}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) определяется (2.4.5) с учетом (2.7.1). При сделанных предположениях о характере сигналов и помех $\mathfrak{a}^{(r)}$ является нормальной случайной величиной со средним значением

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{a}^{(1)}} &= h^2 \left[1 - \rho - \sum_{i=1}^{N_{\text{ш}}} a_i \left(g_{01i}^2 - g_{12}^{(i)} \right) \right], \\ \overline{\mathfrak{a}^{(2)}} &= -h^2 \left[1 - \rho - \sum_{i=1}^{N_{\text{ш}}} a_i \left(g_{02i}^2 - g_{12}^{(i)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = h^2 \left[1 - \rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{ш}}} g_i^2 \varepsilon_i \right], \quad (2.7.8)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{R_{\text{ш}}^2 (1 + R_{\text{ш}}^2) + \overline{h_{\text{ш}}^2} (1 - R_{\text{ш}}^2) \left[1 + 2R_{\text{ш}}^2 + \overline{h_{\text{ш}}^2} (1 - R_{\text{ш}}^2) \right]}{\left(1 + R_{\text{ш}}^2 + \overline{h_{\text{ш}}^2} (1 - R_{\text{ш}}^2) \right)^2}. \quad (2.7.9)$$

В данном случае пороговый уровень A определяется соотношением

$$A = \frac{h^2}{2} \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{ш}}} a_i \left(g_{02i}^2 - g_{01i}^2 \right) \right].$$

Вероятность ошибки будет определяться формулой

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi(h_{\text{э}}) \right], \quad (2.7.10)$$

в которой

$$h_{\mathcal{E}} = \frac{h \left[1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} a_i g_i^2 \right]}{\sqrt{1 - \rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \varepsilon_i g_i^2}}. \quad (2.7.11)$$

Здесь g_i^2 определяется (2.4.15).

Выражение (2.7.11) показывает, что в общем случае вероятность ошибки зависит от величины отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума (h^2), от коэффициентов g_i^2 , характеризующих различие структур сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области, от отношения энергии узкополосных помех к спектральной плотности мощности шума ($\overline{h_{\Pi i}^2}$) коэффициентов ($R_{\Pi i}$), характеризующих скорость изменения параметров узкополосных помех.

Из (2.7.11) следуют частные случаи:

1. В каналах с быстрыми изменениями параметров узкополосных помех ($R_{\Pi i} \ll 1$) формула (2.7.11) преобразуется к виду

$$h_{\mathcal{E}}^2 = h^2 \left[1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{g_i^2 \overline{h_{\Pi i}^2}}{1 + \overline{h_{\Pi i}^2}} \right]. \quad (2.7.12)$$

Этот частный случай другим путем впервые был получен в [143]. При $\overline{h_{\Pi i}^2} \gg 1$ выражение (2.7.12) переходит в (2.4.32), (2.4.33). Как видим, имеет место инвариантность по отношению к интенсивности узкополосных помех и достигается она вследствие избыточности по сигналу.

2. В каналах с неизменными параметрами узкополосных помех ($R_{\Pi i} = 1$) из (2.7.11) получаем

$$h_{\mathcal{E}}^2 = h^2 \left[1 - \rho - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} g_i^2 \right], \quad (2.7.13)$$

что совпадает с (2.4.25), (2.4.26) при $N = 1$. Здесь также имеет место инвариантность по отношению к интенсивности узкополосных помех. Избыточности по сигналу при неизменных параметрах узкополосных помех в принципе не требуется. Однако в общем случае, когда параметры помех меняются, вероят-

ность ошибки зависит от интенсивности узкополосных помех и скорости изменения их параметров.

На рис 2.7.1 представлена зависимость вероятности ошибки P от параметра $\overline{h_{\Pi}^2 T} / \tau_0$, вычисленная по формуле (2.7.11) (кривая 1) при следующих условиях: $h = 4$; $\rho = 0$; $N_{\Pi} = 1$; $g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0,5$; $g_{12} = 0$. Изменения вероятности ошибки P в зависимости от $\overline{h_{\Pi}^2 T} / \tau_0$ происходят в пределах границ, которые определяются формулами (2.7.12), (2.7.13). Верхняя граница (2.7.12) обусловлена избыточностью по сигналу, нижняя граница при увеличении объема классифицированной обучающей выборки может смещаться к пределу, зависящему от величины спектральной плотности мощности шума. Принципиальное отличие алгоритмов с использованием оценок, сформированных по правилам (2.7.2)–(2.7.6), от алгоритмов, в которых оценки на всех этапах обучения входят с одинаковым весом (2.2.22), (2.4.7), в том, что здесь нет ухудшения помехоустойчивости приема вследствие декорреляции измеренных параметров помех.

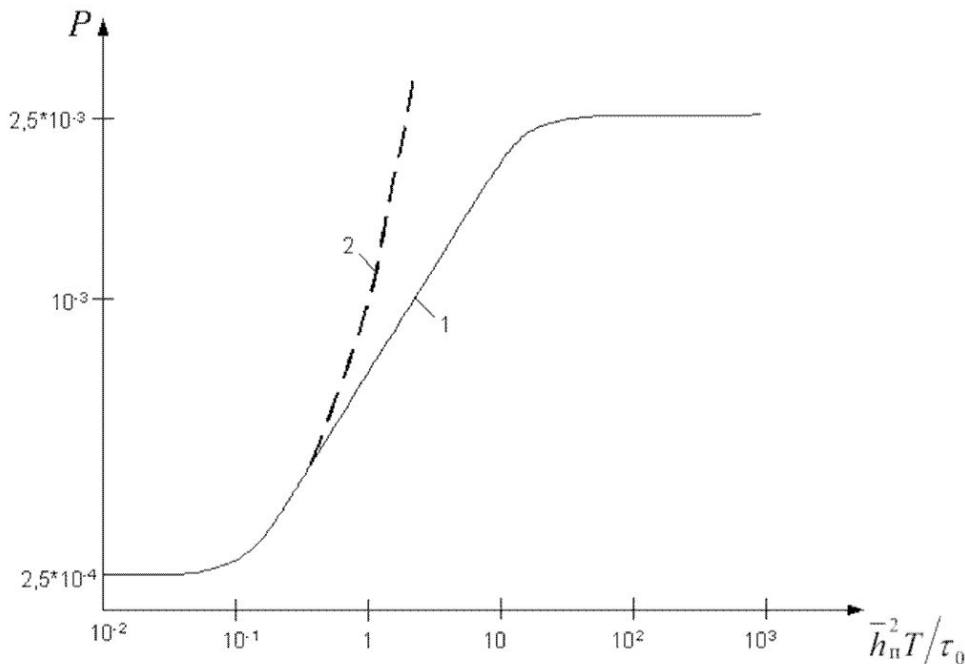


Рисунок 2.7.1- Зависимость P от $\overline{h_{\Pi}^2 T} / \tau_0$

На рис. 2.7.1 штриховой линией (кривая 2) показана зависимость P от $\overline{h_{\Pi}^2 T} / \tau_0$, вычисленная по формуле (2.4.21) при $N = 1$ с учетом (2.4.31) при тех

же условиях, что и кривая 1. Из приведенных кривых видно, что использование оценок с фиксированными весовыми коэффициентами, может привести к существенному ухудшению помехоустойчивости приема при $\overline{h_{\Pi}^2}T/\tau_0 > 1$. Таким образом, при $\overline{h_{\Pi}^2}T/\tau_0 > 1$ формирование оценок узкополосных помех должно вестись на интервале решения. При $\overline{h_{\Pi}^2}T/\tau_0 < 1$ целесообразно использовать для обучения и предшествующие интервалы. В системе, использующей оценки (2.7.2)–(2.7.6), интервал обучения регулируется автоматически в зависимости от мощности помех и скорости изменения их параметров, но достигается это свойство усложнением устройства. Формирователь оценок узкополосных помех при этом должен содержать измеритель $\overline{h_{\Pi i}^2}$ и $R_{\Pi i}$.

В условиях замираний сигнала вероятность ошибки можно найти усреднением выражения (2.7.10) в соответствии с распределением h . В частности, при релеевских замираниях сигнала вероятность ошибки будет определяться выражением

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\overline{h_{\Sigma}^2}}{2 + \overline{h_{\Sigma}^2}}} \right], \quad (2.7.14)$$

в котором $\overline{h_{\Sigma}^2}$ определяется формулой (2.7.11) при замене в ней величины h^2 среднестатистическим значением $\overline{h^2}$. При другой статистике замираний сигнала, например, обобщенно-релеевских или Накагами, вероятность ошибок можно вычислить по формулам (2.4.45), (2.4.47), (2.4.51), (2.4.52) при подстановке в них $\overline{h_{\Sigma}^2}$ по (2.7.11) с соответствующей заменой h^2 на среднестатистическое $\overline{h^2}$. Как и в канале без замираний сигнала здесь целесообразно вести обучение по неклассифицированной выборке помех при $\overline{h_{\Pi}^2}T/\tau_0 > 1$, а при $\overline{h^2}T/\tau_0 < 1$ – комбинированно.

Некогерентный прием. Анализ помехоустойчивости некогерентного приема проведем на примере алгоритма (2.2.38) при использовании оценки (2.7.1) с учетом (2.7.2)–(2.7.6). Рассмотрим двоичные ортогональные в усиленном смысле сигналы с одинаковыми энергиями. Ограничимся здесь рассмотрением сигналов с неперекрывающимися спектрами. Будем полагать $N_{\Pi} = 1$.

Вероятность ошибки найдем по формуле (2.5.1), в которой $V_l^{(r)}(r, l = 1, 2)$ определяются (2.5.2). При сделанных допущениях $\overline{\alpha}_i^{(r)}$ и $\eta_i^{(r)}$ являются нормальными случайными величинами со средними

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_r^{(r)} &= h^2(1 - ag_0^2)\cos\psi, \quad \overline{\eta_r^{(r)}} = h^2(1 - ag_0^2)\sin\psi; \\ \bar{\alpha}_l^{(r)} &= \overline{\eta_l^{(r)}} = 0\end{aligned}\tag{2.7.15}$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{2}(1 + g_0^2 \mathcal{E}),\tag{2.7.16}$$

где \mathcal{E} определяется формулой (2.7.9).

Здесь a и b определяются (2.7.6) при $N_{\Pi} = 1$. В данном случае матрица ковариаций \mathbf{K} величин $\bar{\alpha}_l^{(r)}$ и $\overline{\eta_l^{(r)}}$ диагональна, т. е. в (2.5.7) $R_1 = R_2 = 0$. Поэтому двумерная плотность вероятностей огибающих определяется (2.5.15), а вероятность ошибки формулой (2.5.16), в которой

$$h_{\mathcal{E}}^2 = \frac{h^2(1 - ag_0^2)^2}{1 + \mathcal{E}g_0^2}.\tag{2.7.17}$$

Отсюда видно, что вероятность ошибки в общем случае зависит от величины отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума (h^2), от коэффициентов g_0^2 , характеризующих различимость сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области, от отношения энергии узкополосных помех к спектральной плотности мощности шума ($\overline{h_{\Pi}^2}$) и от коэффициентов R_{Π} , характеризующих скорость изменения параметров узкополосных помех.

Зависимость вероятности ошибки p от величины $\overline{h_{\Pi}^2}T/\tau_0$, характеризующей скорость изменения параметров и мощность узкополосных помех, качественно такая же, как на рис. 2.7.1 (кривая 1).

При быстрых изменениях параметров помех $R_{\Pi} \ll 1$ формула (2.7.17) преобразуется к соотношению

$$h_{\mathcal{E}}^2 = h^2 \left(1 - \frac{g_0^2 \overline{h_{\Pi}^2}}{1 + \overline{h_{\Pi}^2}} \right),\tag{2.7.18}$$

которое определяет верхнюю границу вероятности ошибки, зависящую от избыточности по сигналу. Этот частный случай подробно рассмотрен в [144, п. 3.9].

Нижняя граница вероятности ошибки зависит от объема обучающей выборки. Причем, в зависимости от скорости изменения параметров и мощности

помех, объем выборки автоматически регулируется для исключения уменьшения вероятности ошибки из-за декорреляции измеренных параметров помех. При $h_{\text{н}}^2 T / \tau_0 \leq 1$ использование предшествующих интервалов времени для формирования оценок помех целесообразно, однако усложняет систему.

В условиях релейевских замираний сигналов вероятность ошибки определится выражением

$$p = \frac{1}{h_{\text{н}}^2 + 2} = \frac{1 + g_0^2 \varepsilon}{h^2 (1 - a g_0^2)^2 + 2 + 2 g_0^2 \varepsilon}, \quad (2.7.19)$$

в котором ε определено (2.7.9), а $\overline{h^2}$ определяется (2.4.38).

При обобщенных релейевских замираниях сигнала и замираниях, удовлетворяющих m -распределению, вероятность ошибки при некогерентном приеме определяется выражениями (2.5.25), (2.5.26) при подстановке в них $\overline{h_{\text{н}}^2}$ по формуле (2.7.17). Нетрудно видеть, что при замираниях сигнала, сохраняются отмеченные выше особенности подавления узкополосных помех.

Таким образом, при приеме сигналов с неперекрывающимися спектрами интервалы между рабочими посылками можно использовать для формирования оценок узкополосных помех. Причем в зависимости от скорости изменений параметров помех формирование оценок ведется как на интервале решения, так и на предшествующих интервалах, что улучшает качество оценок и делает систему более гибкой, т. к. позволяет автоматически регулировать объем обучающей выборки, обеспечивая величину вероятности ошибки от значения, определяемого избыточностью сигнала, до практически полного подавления узкополосных помех, естественно, ценой усложнения устройства.

2.8. Вопросы реализации решающих правил приема с обучением по узкополосным помехам

Реализация полученных в предыдущих параграфах алгоритмов приема возможна как с помощью схем на перемножителях, так и на согласованных фильтрах.

Когерентный прием. Рассмотрим реализацию алгоритма когерентного приема (2.2.19) вначале при обучении по классифицированной выборке помех. Один из вариантов схемы реализации обработки I -го сигнала на перемножителях представлен на рис. 2.8.1, пример реализации системы обработки двоичных сигналов на согласованных фильтрах показан на рис. 2.8.2. В соответствии с алгоритмом (2.2.19) после вычитания из принятой смеси оценки совокупности узкополосных помех ведется обычная корреляционная обработка сигнала и сравнение результатов обработки для каждой позиции сигнала со своим порогом. Поэтому основная особенность работы схемы отражается в построении блока оценки совокупности узкополосных помех, который строится по правилу (2.2.22) с учетом (2.2.17) и (2.2.10). Работа блока оценки узкополосных помех

может происходить следующим образом. Перед началом передачи полезного сигнала производится измерение неизвестных параметров узкополосных помех (обучение по помехе). Этот интервал можно назвать обучающим или испытательным.

В каналах с постоянными параметрами величина обучающего интервала определяется заданными требованиями уменьшения ошибки измерения, обусловленными флуктуационным шумом. После обучения по узкополосным помехам ведется передача полезного сигнала и соответственно прием его с использованием измеренных значений параметров помех.

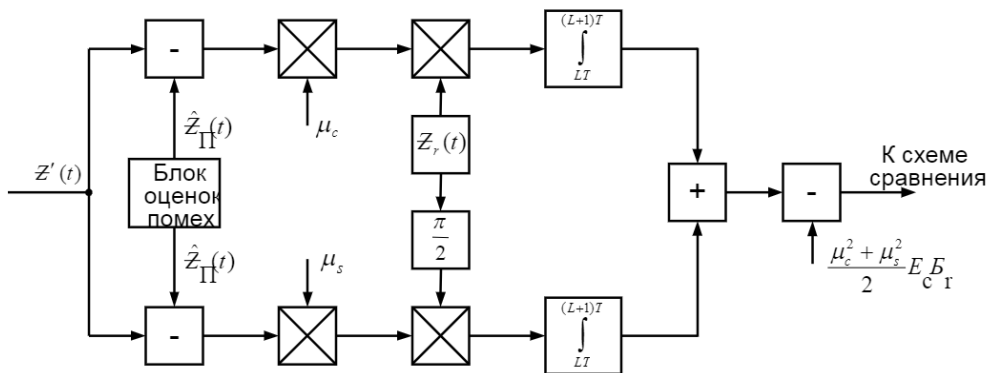


Рис. 2.8.1. Схема когерентного приема

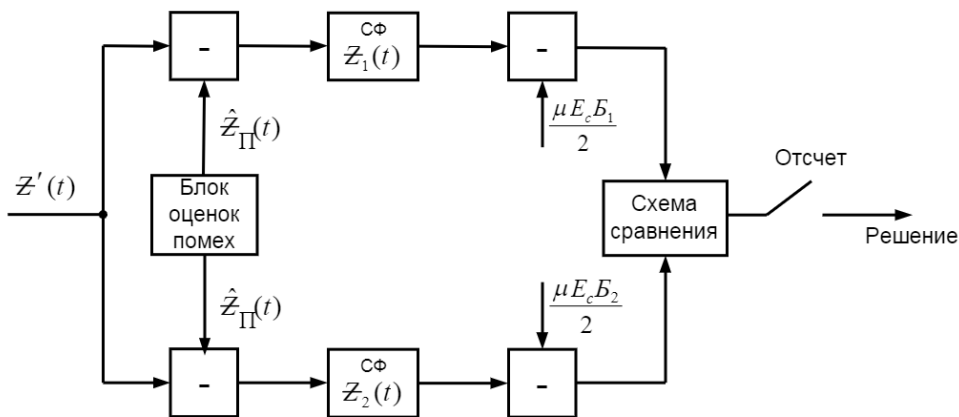


Рис. 2.8.2. Когерентный прием на согласованных фильтрах

Для иллюстрации рассмотрим формирование оценки i -ой узкополосной помехи (рис. 2.8.3). На вход блока оценки помех поступает смесь узкополосных помех с шумом во время отсутствия полезного сигнала. Из нее в соответствии с

правилом (2.2.10) с помощью перемножителей, интеграторов и весовых усилителей с весом $1/E_{\pi i}$ формируются оценки $\hat{\mu}_{\text{сп}i}^{(k)}$ и $\hat{\mu}_{\text{сп}i}^{(k)}$. Они поступают на рециркулятор, представляющий собой линию задержки (ЛЗ) на длительность элемента сигнала T и сумматор, в котором суммируются оценки $\hat{\mu}_{\text{сп}i}^{(k)}$, сформированные

на данном этапе наблюдения, со значениями оценок, полученными на предыдущих этапах наблюдения. Далее оценки проходят на шаговый делитель (ШД), т. е. делитель на N , где N – число накопленных оценок. Сформированные таким образом оценки параметров

$$m_{\text{сп}i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{\text{сп}i}^{(k)}, \quad m_{\text{сп}i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{\text{сп}i}^{(k)}$$

перемножаются с функциями $Z_{\pi i}(t)$ и $\tilde{Z}_{\pi i}(t)$ и после суммирования образуют оценку i -ой узкополосной помехи $\hat{Z}_{\pi i}(t)$. Складываясь на общем сумматоре, на который поступают оценки, сформированные в аналогичных ветвях блока, образуется оценка совокупности узкополосных помех

$$\hat{Z}_{\pi}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\pi}} \hat{Z}_{\pi i}(t).$$

В каналах с изменяющимися параметрами узкополосных помех оценки нужно периодически обновлять. Поэтому испытательные интервалы должны следовать с определенным промежутком времени между информационными посылками, зависящим от скорости изменения параметров узкополосных помех. Если передача ведется сигналами с неперекрывающимися спектрами, то интервалы между рабочими посылками можно использовать для измерения параметров помех и обновления результатов измерений. Для этого в приемнике можно использовать обратную связь по решению. В общем случае для обучения, видимо, целесообразно комбинированное использование специальных испытательных интервалов и интервалов между рабочими посылками.

Формирование пороговых уровней $\frac{\mu^2 E_c B_r}{2}$ показано на рис. 2.8.4. Формирование коэффициента B_r осуществляется по правилу (2.2.25) с учетом (2.2.26).

Другой вариант схемы реализации можно получить, если в алгоритме (2.2.21) выразить составляющие X_r и Y_r в следующем виде

$$\begin{aligned}
X_r &= x^{(r)} - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left(m_{\text{с}\Pi i} x_i^{(\Pi r)} + m_{\text{с}\Pi i} y_i^{(\Pi r)} \right), \\
Y_r &= y^{(r)} + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left(m_{\text{с}\Pi i} y_i^{(\Pi r)} - m_{\text{с}\Pi i} x_i^{(\Pi r)} \right),
\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

где $x^{(r)}$ и $y^{(r)}$ определяются выражениями:

$$x^{(r)} = \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r(t) dt, \quad y^{(r)} = \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \tilde{\underline{Z}}_r(t) dt; \tag{2.8.1a}$$

$m_{\text{с}\Pi i}$ и $m_{\text{с}\Pi i}$ определяются (2.2.17), формирование их показано на рис. 2.8.3;

$x_i^{(\Pi r)}$ и $y_i^{(\Pi r)}$ определены (2.4.9). В этом случае реализация алгоритма (2.2.21) возможна по схеме рис. 2.8.5.

Реализация алгоритма (2.2.21) возможна также на основе адаптивных согласованных фильтров. Определим характеристики адаптивных согласованных фильтров, вытекающие из соотношений (2.8.1). Для этого введем аналитические сигналы.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}'(t) &= \underline{Z}'(t) + j\tilde{\underline{Z}}'(t), \quad \underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_r(t) + j\tilde{\underline{Z}}_r(t), \\
\underline{Z}_{\Pi i}(t) &= \underline{Z}_{\Pi i}(t) + j\tilde{\underline{Z}}_{\Pi i}(t), \quad \underline{X}^{(k)}(t) = \underline{x}^{(k)}(t) + j\tilde{\underline{x}}^{(k)}(t).
\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Рассмотрим комплексную величину

$$\underline{V}_r = X_r - jY_r, \tag{2.8.3}$$

где X_r и Y_r определены (2.8.1). Подставим их в (2.8.3), получим

$$\underline{V}_r = (x^{(r)} - jy^{(r)}) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[(m_{\text{с}\Pi i} - jm_{\text{с}\Pi i})(x_i^{(\Pi r)} + jy_i^{(\Pi r)}) \right]. \tag{2.8.4}$$

Используя соотношения (2.8.1a), (2.8.2), (2.2.17), (2.4.9), найдем

$$x^{(r)} - jy^{(r)} = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r^*(t) dt, \tag{2.8.5}$$

$$m_{\text{с}\Pi i} - jm_{\text{с}\Pi i} = \frac{1}{2NE_{\Pi i}} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} \underline{X}^{(k)}(t) \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) dt, \tag{2.8.6}$$

$$x_i^{(\Pi r)} + jy_i^{(\Pi r)} = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}_{\Pi i}(t) \underline{Z}_r^*(t) dt. \tag{2.8.7}$$

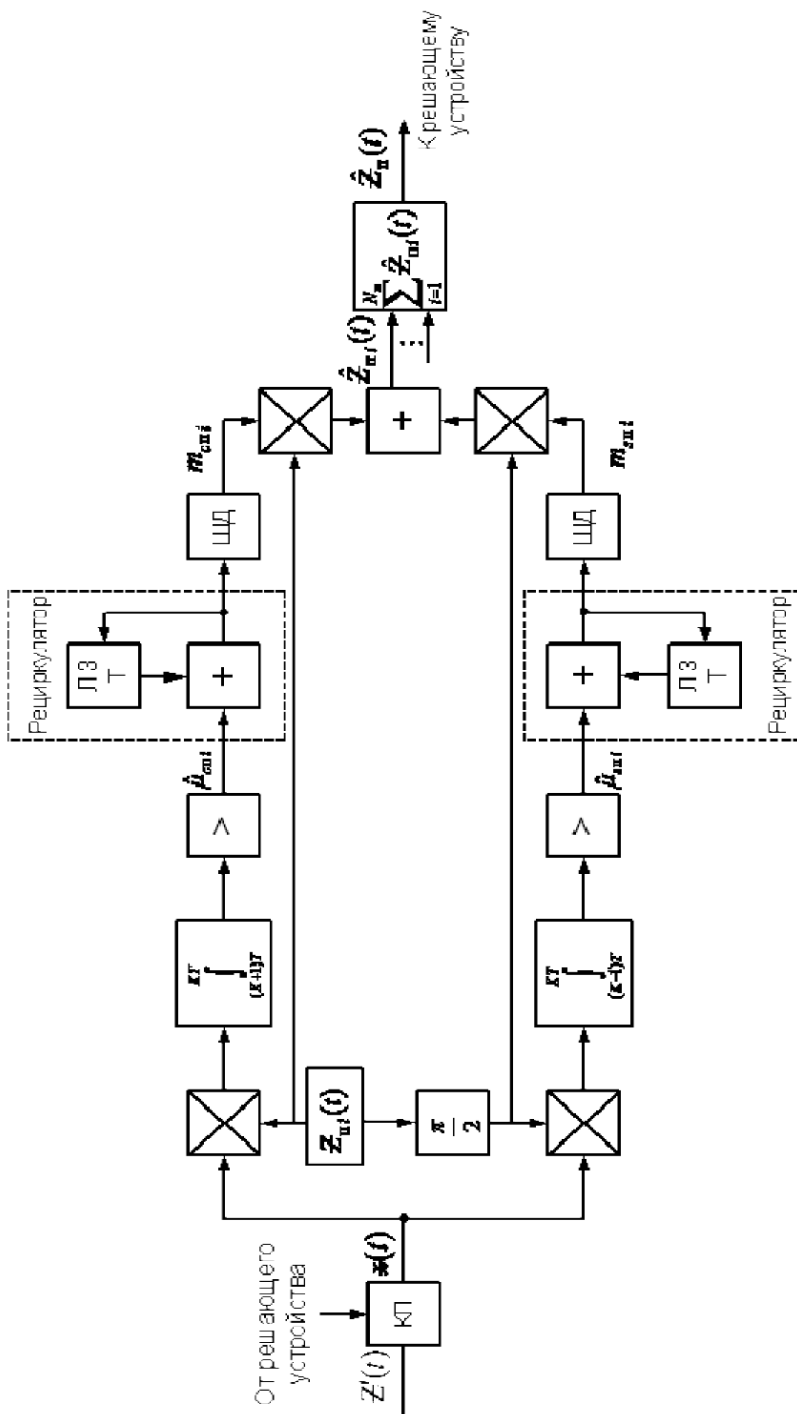


Рисунок 2.Е.3- Схема формирования оценки узкополосных помех

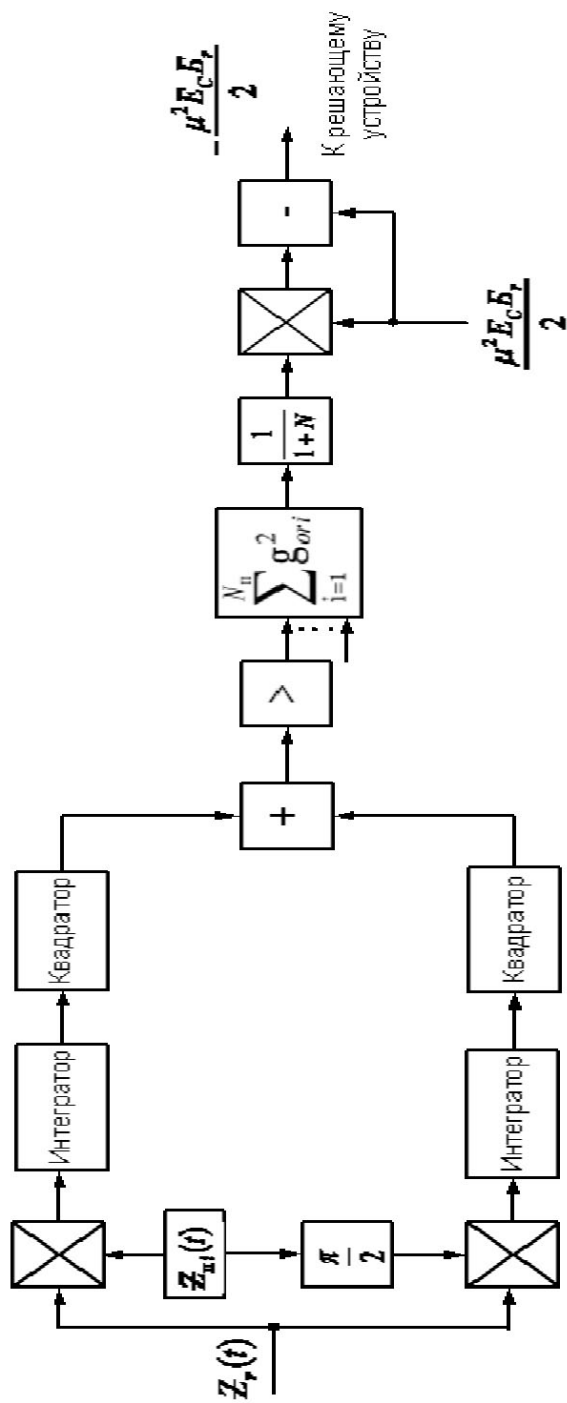


Рисунок 2.8.4. Схема формирования пороговых уровней

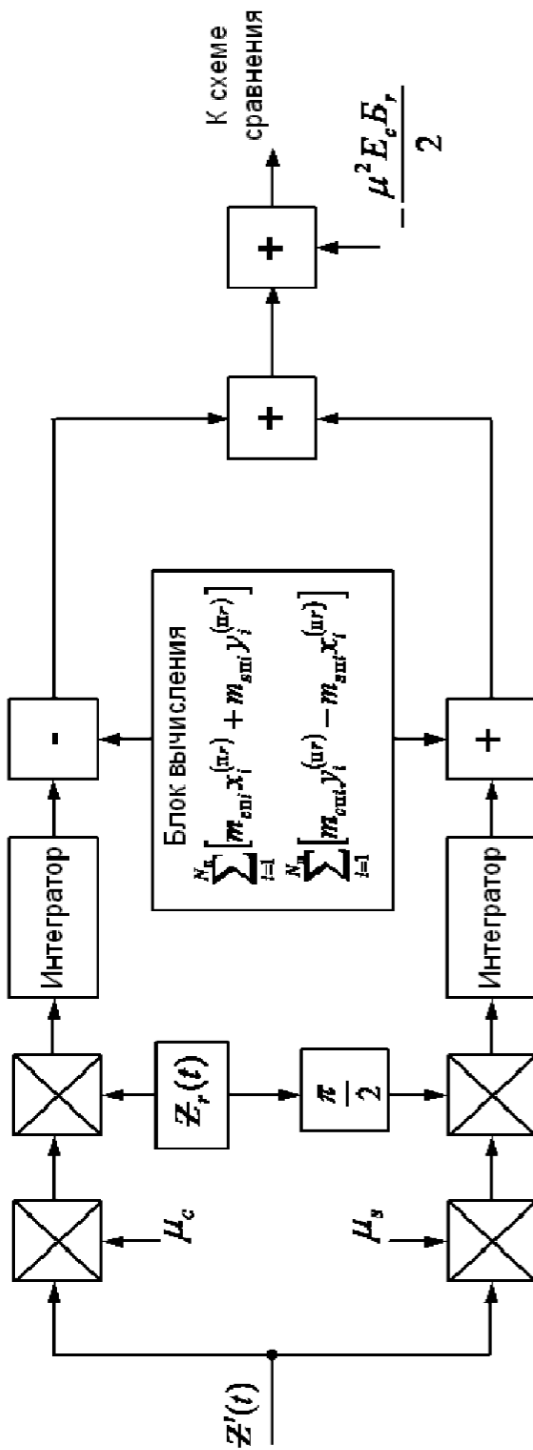


Рисунок 2.8.5- Вариант схемы реализации когерентного приема

Здесь $\underline{Z}_r^*(t)$ и $\underline{Z}_{\Pi i}^*(t)$ – комплексно-сопряженные с $\underline{Z}_r(t)$ и $\underline{Z}_{\Pi i}(t)$ функции.

С учетом (2.8.5)–(2.8.7) выражение (2.8.4) можно представить в виде

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r^*(t) dt - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[\frac{G_{ri}^*}{2N} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} \underline{X}^{(k)}(t) \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) dt \right], \quad (2.8.8)$$

где

$$G_{ri}^* = \frac{1}{2E_{\Pi i}} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}_{\Pi i}(t) \underline{Z}_r^*(t) dt \quad (2.8.9)$$

– комплексный коэффициент взаимной корреляции, определяющий различие структур сигнала и i -ой узкополосной помехи в частотно-временной области.

Действительная часть первого члена в правой части (2.8.8) представляет собой напряжение на выходе фильтра, согласованного с сигналом $\underline{Z}_r(t)$, т. е. имеющего импульсную характеристику

$$g_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r(T-t), & LT < t < (L+1)T, \\ 0, & t < LT, t > (L+1)T. \end{cases} \quad (2.8.10)$$

Каждое слагаемое (по i) второго члена в (2.8.8) есть взвешенная с весом $G_{ri}^* = G_{0ri}^* E_c$ комплексная оценка параметров узкополосных помех, накопленная на интервале NT , т. е.

$$\frac{1}{2NE_{\Pi i}} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} \underline{X}^{(k)}(t) \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) dt. \quad (2.8.11)$$

Действительная часть оценки $\int_T \underline{X}^{(k)}(t) \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) dt$ представляет собой напряжение на выходе фильтра, согласованного с i -й узкополосной помехой, когда на входе его действует смесь помехи с шумом. Импульсная характеристика этого фильтра:

$$g_{\Pi i}(t) = \begin{cases} \underline{Z}_{\Pi i}(T-t), & t \in T, \\ 0, & \bar{t} \in T. \end{cases} \quad (2.8.12)$$

Учитывая, что при когерентном приеме в момент времени T отсчитывается действительное значение величины \underline{V}_r , алгоритм (2.2.21) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}(\underline{\mu}\underline{V}_r^*) - \frac{\mu^2 E_c B_r}{2} > \operatorname{Re}(\underline{\mu}\underline{V}_l^*) - \frac{\mu^2 E_c B_l}{2}, \quad r \neq l. \quad (2.8.13)$$

Здесь $\underline{\mu} = \mu_c - j\mu_s$, $\mu = |\underline{\mu}|$.

Возможный вариант схемы реализации алгоритма (2.8.13) показан на рис. 2.8.6. Эту схему можно рассматривать как адаптивный согласованный фильтр для каналов с узкополосными и флуктуационными помехами.

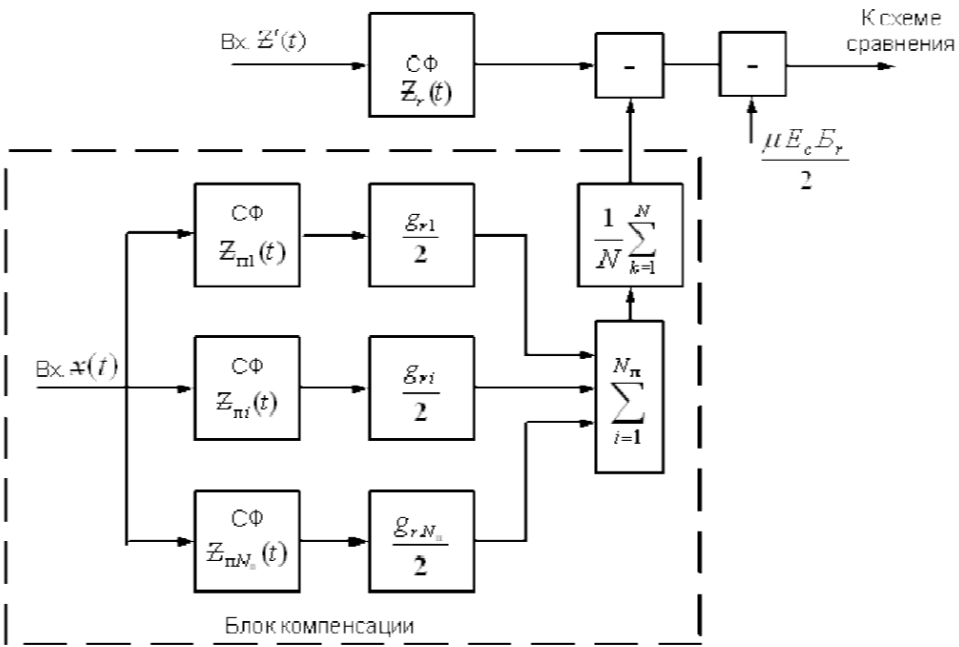


Рис. 2.8.6. Схема реализации на согласованных фильтрах

В некоторых случаях синтез решающей схемы удобно производить, используя разложение функций сигнала $\underline{Z}_r(t)$ и узкополосных помех $\underline{Z}_{\pi i}(t)$ в ряд по произвольному, вообще говоря, ортонормированному базису:

$$\underline{Z}_r(t) = \sum_{P=P_{r1}}^{P_{r2}} \underline{Z}_{rp}(t), \quad \underline{Z}_{\pi i}(t) = \sum_{P=P_{\pi1}}^{P_{\pi2}} \underline{Z}_{\pi pi}(t). \quad (2.8.14)$$

Здесь

$2(P_{r2} - P_{r1} + 1) = 2F_r T$ – база r -го варианта сигнала;

$2(P_{\Pi 2} - P_{\Pi 1} + 1) = 2F_{\Pi i} T$ – база i -й узкополосной помехи.

При этом (2.8.8) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \underline{V}_r = & \frac{1}{2} \sum_{P=P_{r1}}^{P_{r2}} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_{rP}^*(t) dt - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[\frac{1}{2NE_{\Pi i}} \sum_{P=P_{\Pi 1}}^{P_{\Pi 2}} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}_{\Pi P}(t) \underline{Z}_{rP}^*(t) dt \int_0^{NT} \underline{X}(t) \underline{Z}_{\Pi P i}^*(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

Используем для примера разложение функций $\underline{Z}_r(t)$ и $\underline{Z}_{\Pi i}(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическому базису

$$\underline{Z}_r(t) = \sum_{P=P_{r1}}^{P_{r2}} A_{rP} e^{j(p\omega_0 t + \varphi_{rP})} = \sum_{P=P_{r1}}^{P_{r2}} \underline{Z}_{rPi}(t), \quad (2.8.16)$$

$$\underline{Z}_{\Pi i}(t) = \sum_{P=P_{\Pi 1}}^{P_{\Pi 2}} A_{\Pi Pi} e^{j(p\omega_0 t + \varphi_{\Pi Pi})} = \sum_{P=P_{\Pi 1}}^{P_{\Pi 2}} \underline{Z}_{\Pi Pi}(t).$$

В условиях, когда параметры узкополосных помех ($A_{\Pi Pi}$ и $\varphi_{\Pi Pi}$) неизменны или незначительно меняются на интервале измерения и использования измеренных значений $(N + L + 1)T$ выражение (2.8.15) с учетом (2.8.16) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \underline{V}_r = & \frac{1}{2} \sum_{P=P_{r1}}^{P_{r2}} A_{rP} e^{-j\varphi_{rP}} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) e^{-jp\omega_0 t} dt - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{P=P_{\Pi 1}}^{P_{\Pi 2}} A_{rP} e^{-j\varphi_{rP}} \frac{1}{N} \int_0^{NT} \underline{X}(t) e^{-jp\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (2.8.17)$$

В этом случае, как видно из (2.8.17), структуру узкополосных помех знать не обязательно для синтеза, т. к. использовано разложение совокупности узкополосных помех в сигнальном базисе с оценкой неизвестных параметров составляющих помех, совпадающих с соответствующими компонентами разложения сигнала в ряд Фурье.

Если же параметры узкополосных помех меняются относительно быстро, то они должны измеряться непосредственно на интервале решения, т. е. по неклассифицированной смеси сигнала с помехами. Тогда величины X_r и Y_r (2.2.20) содержат оценки $\hat{Z}_{\Pi}(t)$ в форме (2.2.24б), поэтому с учетом (2.2.23), (2.4.9), (2.8.1а) можно записать

$$\begin{aligned} X_r &= x^{(r)} - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{1}{E_{\Pi i}} \left(x_i^{(\Pi)} x_i^{(\Pi r)} + y_i^{(\Pi)} y_i^{(\Pi r)} \right), \\ Y_r &= y^{(r)} + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{1}{E_{\Pi i}} \left(x_i^{(\Pi)} y_i^{(\Pi r)} - y_i^{(\Pi)} x_i^{(\Pi r)} \right). \end{aligned} \quad (2.8.18)$$

Реализация алгоритма (2.2.21) при этом возможна по схеме, представленной на рис. 2.8.7. Возможна также реализация на основе согласованных фильтров. В этом случае комплексная величина \underline{V}_r (2.8.3), входящая в алгоритм работы приемника (2.8.13), определяется согласно соотношению (2.8.18) с учетом (2.8.2), (2.8.5), (2.8.7) следующим выражением

$$\begin{aligned} \underline{V}_r &= (x^{(r)} - jy^{(r)}) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} (x_i^{(\Pi)} - jy_i^{(\Pi)}) (x_i^{(\Pi r)} + jy_i^{(\Pi r)}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \left[\underline{Z}_r^*(t) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} G_{ri}^* \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

Здесь обозначено

$$(x_i^{(\Pi)} - jy_i^{(\Pi)}) = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) dt. \quad (2.8.20)$$

Согласно (2.8.19) тракт обработки сигнала в этом случае можно рассматривать как единый адаптивный согласованный фильтр с импульсной характеристикой [144]

$$\underline{G}_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r^*(T-t) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} G_{ri}^* \underline{Z}_{\Pi i}^*(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \in \bar{T}. \end{cases} \quad (2.8.21)$$

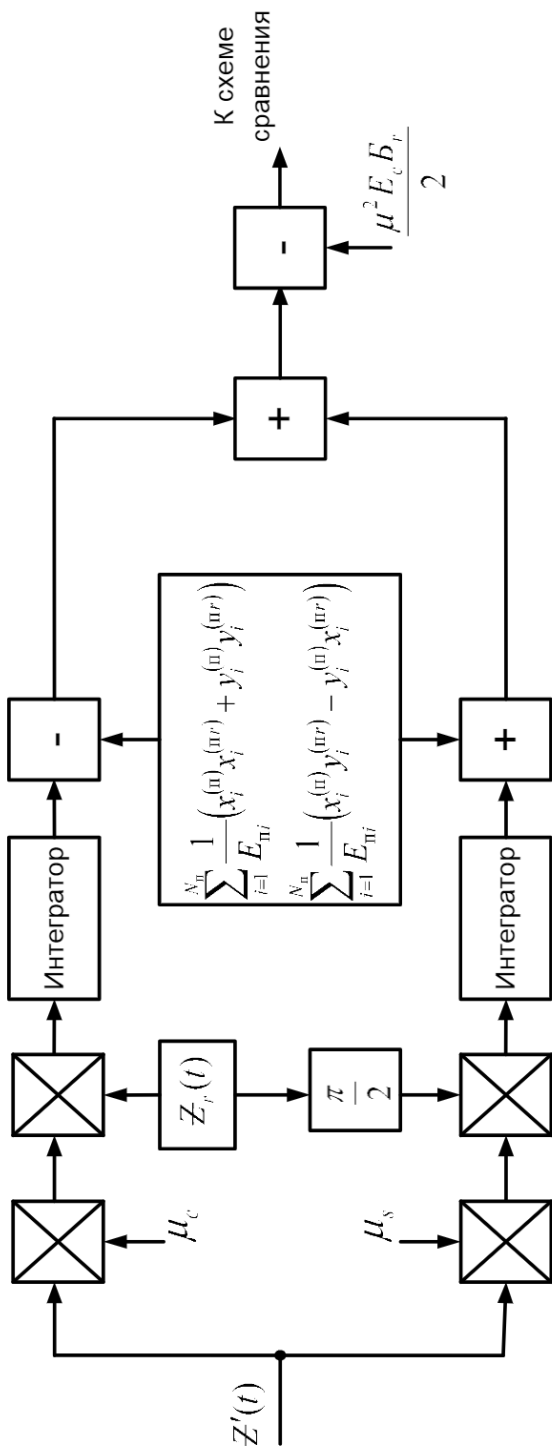


Рисунок 2.8.7- Вариант схемы когерентного приема при формировании оценок помех по неклассифицированной выборке

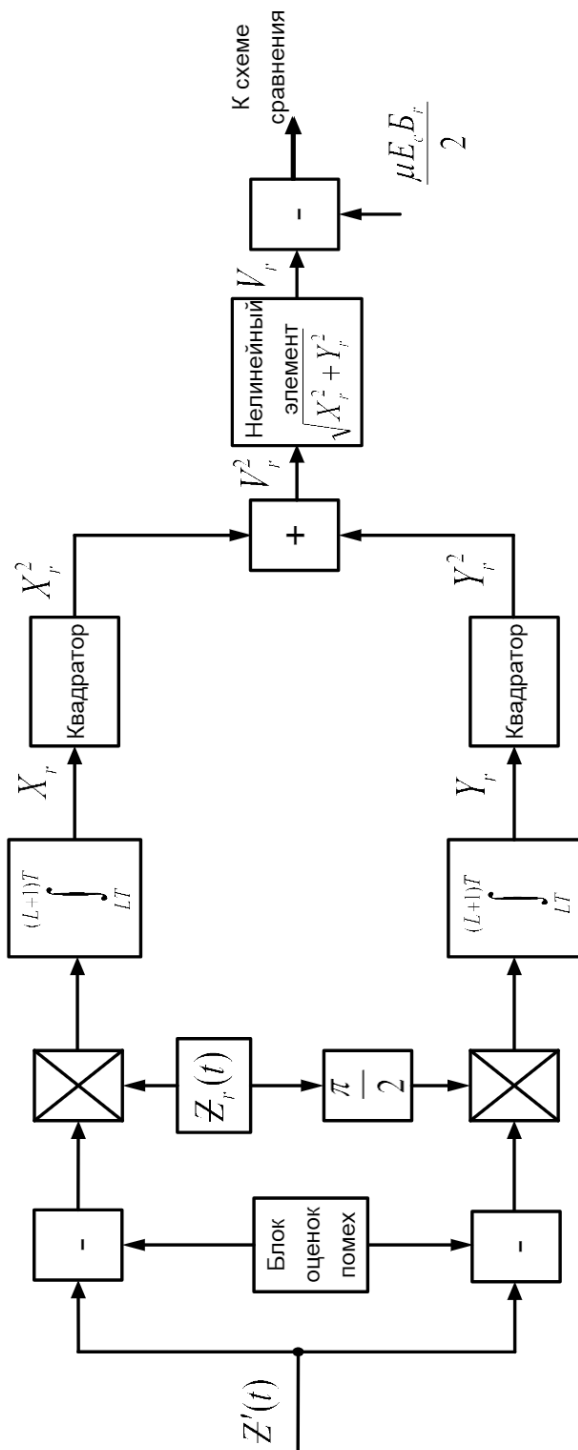


Рисунок 2.8.8- Схема реализации некогерентного приема

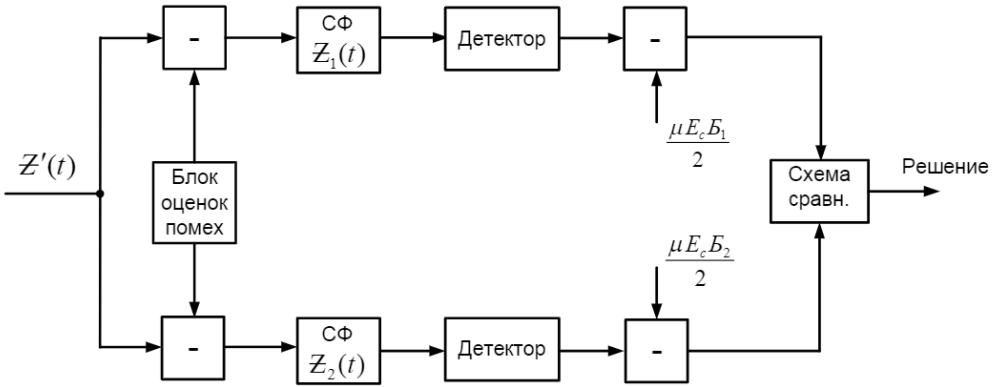


Рис. 2.8.9. Схема реализации некогерентного приема на согласованных фильтрах

При использовании оценок вида (2.6.16) комплексную величину \underline{V}_r можно записать в форме

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \left[\underline{Z}_r^*(t) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{\overline{h_{\Pi i}^2}}{1 + h_{\Pi i}^2} G_{ri}^* \underline{Z}_{\Pi i}^*(t) \right] dt. \quad (2.8.22)$$

Выражение в квадратных скобках (2.8.22) можно рассматривать как комплексную импульсную характеристику единого адаптивного согласованного фильтра

$$\underline{G}_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r^*(T-t) - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{\overline{h_{\Pi i}^2}}{1 + h_{\Pi i}^2} G_{ri}^* \underline{Z}_{\Pi i}^*(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \in \bar{T}. \end{cases} \quad (2.8.23)$$

Нетрудно видеть, что при $\overline{h_{\Pi i}^2} \gg 1$ соотношения (2.8.22) и (2.8.23) переходят в (2.8.19) и (2.8.21).

При использовании разложения (2.8.14) выражение (2.8.22) можно привести к виду

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} \underline{Z}'(t) \left[\sum_{\substack{P=P_{r1} \\ P \neq P_{\Pi}}}^{P_{r2}} \underline{Z}_{rp}^*(t) + \sum_{P=P_{n1}}^{P_{n2}} \frac{1}{1 + h_{\Pi p}^2} \underline{Z}_{rp}^*(t) \right] dt. \quad (2.8.24)$$

Отсюда видно, что прием сигнала в основном определяется составляющими, не пораженными узкополосными помехами. Составляющие сигнала, пораженные узкополосными помехами, вносят свой вклад в решение с весом, обратно пропорциональным величине $h_{\text{пп}}^2$. При $h_{\text{пп}}^2 \gg 1$ происходит режекция составляющих сигнала, совпадающих с узкополосными помехами. В этих условиях высокая достоверность приема может быть обеспечена вследствие различия структур сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области, т. е. необходима избыточность по сигналу.

Некогерентный прием. Обратимся к рассмотрению реализации решающего правила (2.2.36). Здесь, как и при когерентном приеме, основная особенность работы схемы состоит в вычитании из принятой смеси оценки совокупности узкополосных помех. После чего производится обычная квадратурная обработка сигналов с помощью схемы на перемножителях, как показано на рис. 2.8.8, для обработки r -го варианта сигнала или с помощью согласованных фильтров (рис. 2.8.9) с последующим сравнением результатов обработки для каждой позиции сигнала со своим порогом. Формирование оценки совокупности узкополосных помех возможно по классифицированной или по неклассифицированной обучающей выборке помех. При использовании классифицированной обучающей выборки помех формирование оценок узкополосных помех можно вести, как и при когерентном приеме, например, по схеме рис. 2.8.3.

Возможна также реализация решающего правила (2.2.36) путем формирования величин X_r и Y_r в $V_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2}$ по правилу (2.8.1) (рис. 2.8.10), а также на основе адаптивных согласованных фильтров. В этом случае в алгоритм (2.2.36) должна входить величина V_r , вычисленная по формуле

$$V_r = |\underline{V}_r| = |X_r - jY_r| = \sqrt{(\text{Re} \underline{V}_r)^2 + (\text{Im} \underline{V}_r)^2}, \quad (2.8.25)$$

где \underline{V}_r определяется (2.8.8) или (2.8.15). Вариант адаптивного согласованного фильтра в этом случае можно представить по схеме рис. 2.8.11. В нем в соответствии (2.8.8) формирование \underline{V}_r происходит с помощью фильтра, согласованного с аналитическим сигналом $\underline{Z}_r(t)$ и $N_{\text{п}}$ фильтров, согласованных с узкополосными помехами.

Комплексная импульсная характеристика фильтра, согласованного с сигналом, определяется выражением:

$$\underline{G}_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r^*(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \in \bar{T}. \end{cases} \quad (2.8.26)$$

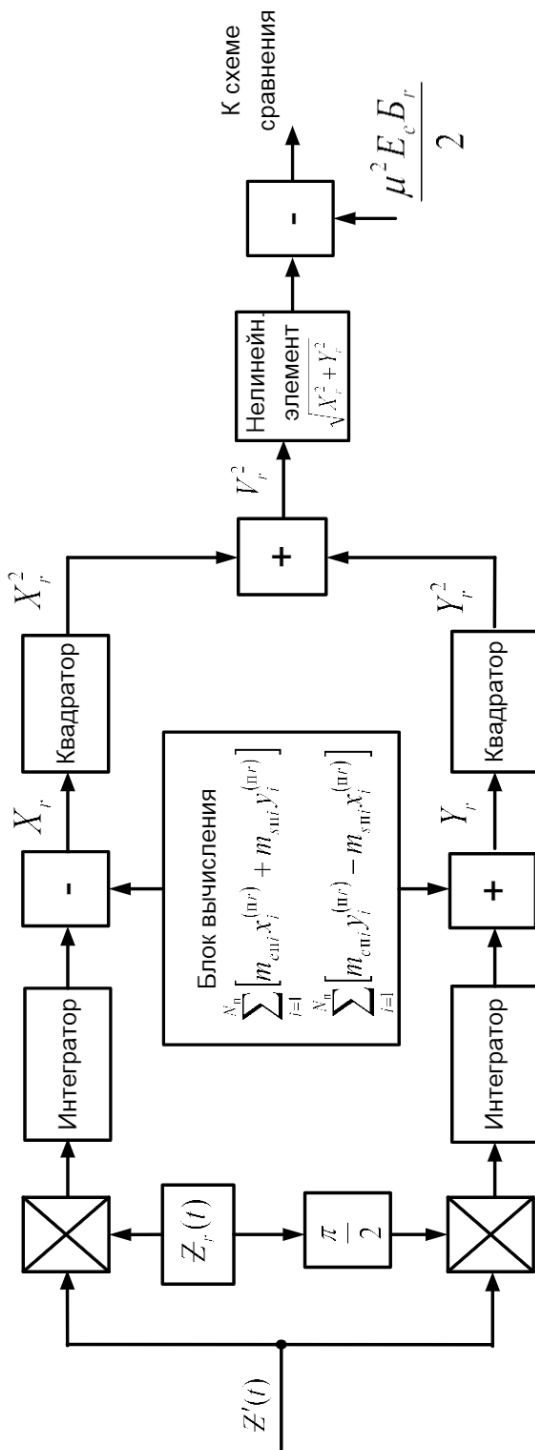


Рисунок 2.8.10- Вариант схемы реализации некогерентного приема

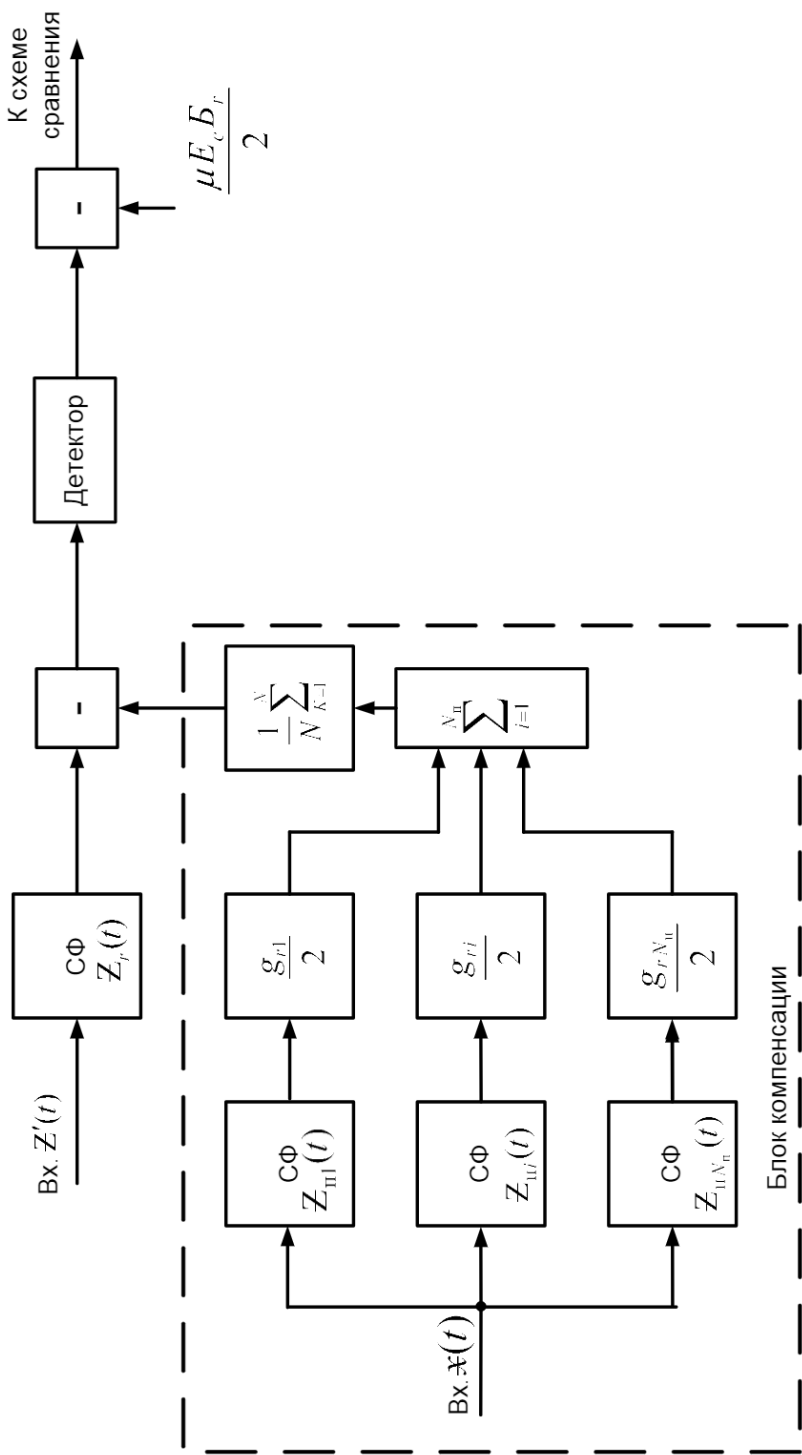


Рисунок 2.8.11- Схема некогерентного приема с согласованными фильтрами

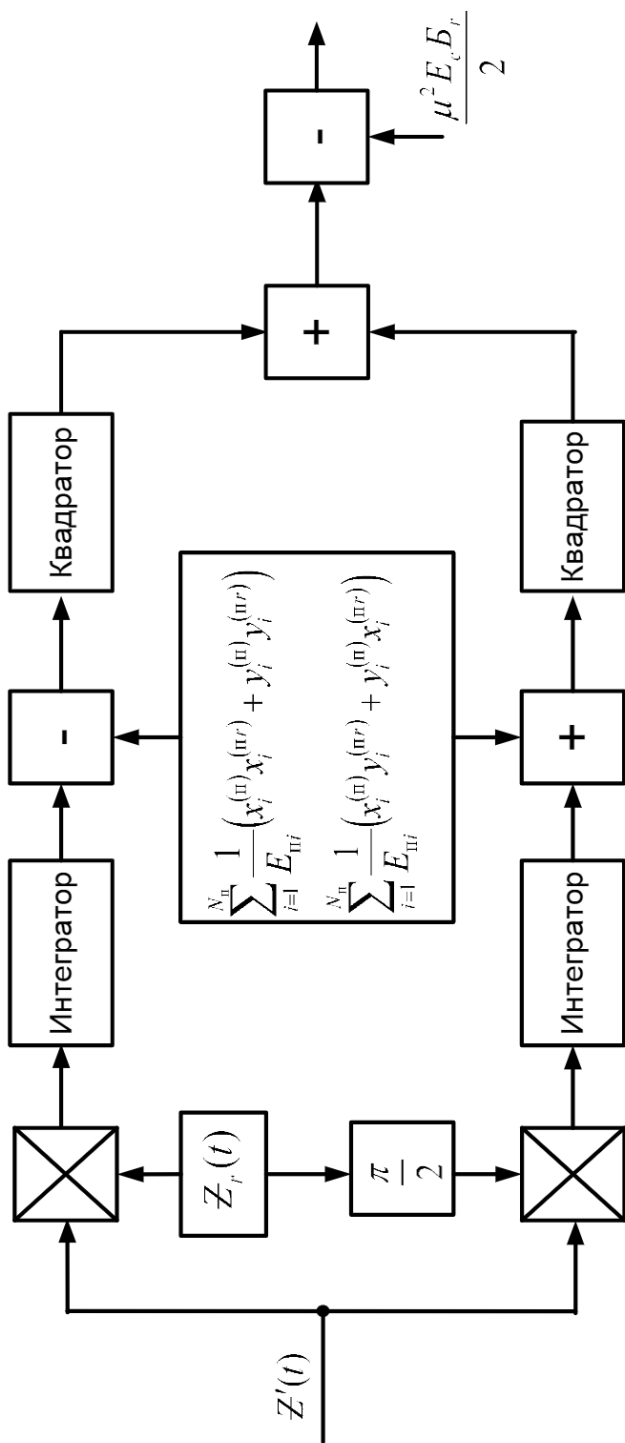


Рисунок 2.8.12- Вариант схемы некогерентного приема

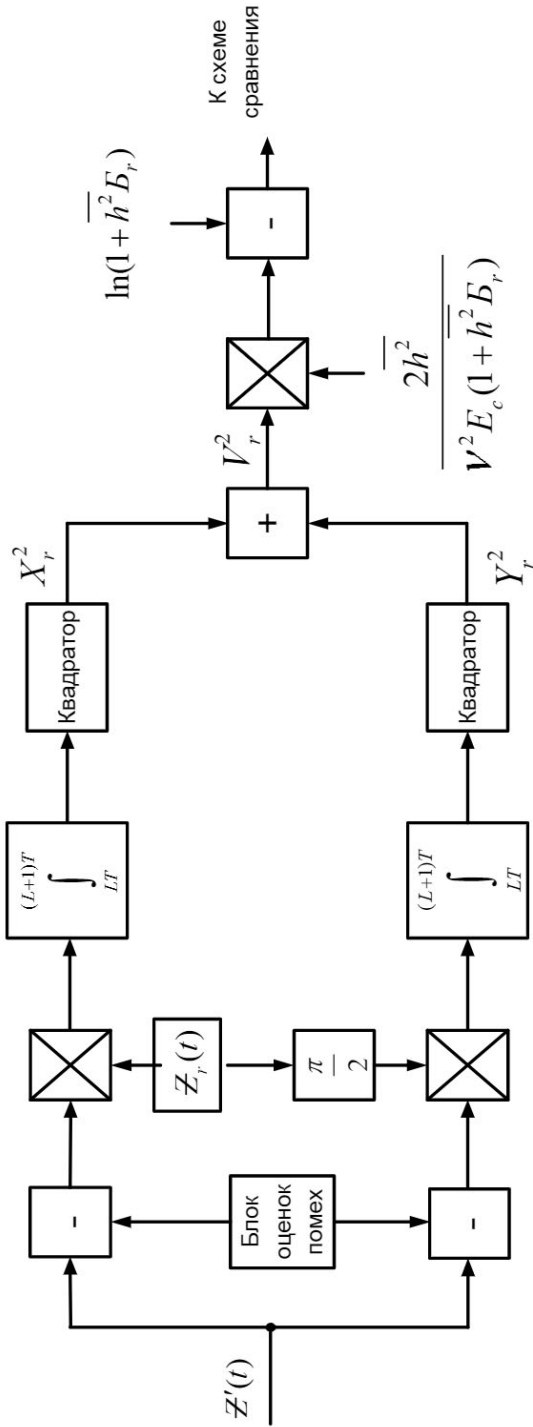


Рисунок 2.8.13- Разновидность некогерентного приема замирающих по Рэлею СИГНАЛОВ

Фильтры, согласованные с узкополосными помехами, имеют комплексные импульсные реакции вида:

$$\underline{G}_{\Pi i}(t) = \begin{cases} \underline{Z}_{\Pi i}(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \in \bar{T}. \end{cases} \quad (2.8.27)$$

При формировании оценок узкополосных помех по неклассифицированной обучающей выборке величина \underline{V}_r в (2.8.25) вычисляется по правилу (2.8.19) или (2.8.22), т. е. тракт обработки сигнала можно строить на основе единого адаптивного согласованного фильтра с импульсной характеристикой (2.8.21), (2.8.22). Вариант некогерентного приема с использованием величин X_r и Y_r по (2.8.18) на перемножителях приведен на рис. 2.8.12.

Аналогично можно реализовать решающее правило (2.2.41) (например, по рис. 2.8.13). Его отличие от (2.2.36) в основном в отсутствии нелинейного элемента $\sqrt{X_r^2 + Y_r^2}$, величинах весовых коэффициентов и пороговых уровней. При симметричном воздействии узкополосных помех на все варианты сигнала оба правила эквивалентны, что следует из (2.2.38) и (2.2.42).

При использовании аналитических сигналов правило (2.2.41) записывается в форме

$$\frac{\overline{h^2 |\underline{V}_r|^2}}{v^2 E_c (1 + h^2 B_r)} - \frac{\overline{h^2 |\underline{V}_l|^2}}{v^2 E_c (1 + h^2 B_l)} > \ln \frac{(1 + \overline{h^2 B_r})}{(1 + h^2 B_l)}, \quad (2.8.28)$$

где \underline{V}_r определяется выражениями (2.8.8), (2.8.15), (2.8.19), (2.8.22), реализация которых аналогична рассмотренным выше.

2.9. Адаптивный одиночный прием при произвольных изменениях параметров узкополосных помех

В этом параграфе рассмотрим прием в условиях действия стохастических узкополосных помех. Представим узкополосную помеху в виде

$$\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t) = \operatorname{Re} \left[\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t) \underline{Z}_{\Pi}(t) \right] = \mu_{c\Pi}(t) \underline{Z}_{\Pi}(t) + \mu_{s\Pi}(t) \tilde{\underline{Z}}_{\Pi}(t), \quad (2.9.1)$$

$$\underline{t} = T_0 \div T_{\alpha},$$

где

$$\underline{\mathcal{M}}_{\Pi} = \mu_{c\Pi}(t) - j\mu_{s\Pi}(t) \quad (2.9.2)$$

– комплексная огибающая узкополосной помехи;

$$\underline{Z}_{\Pi}(t) = \underline{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t) + j\tilde{\underline{\mathcal{Z}}}_{\Pi}(t) = e^{j\omega_{\Pi} t} \quad (2.9.3)$$

– детерминированная функция. Здесь ω_{Π} – средняя частота узкополосной помехи.

Комплексную огибающую можно представить как вектор состояния, который генерируется динамической системой, описываемой комплексным векторным дифференциальным уравнением [146]

$$\frac{d\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}(t) \left[\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t), t \right] + \underline{G}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}(t), \quad (2.9.4)$$

где $\underline{F}_{\Pi}(t) \left[\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t), t \right]$ – в общем случае нелинейная матричная функция. В частном случае она может быть линейной, тогда уравнение (2.9.4) имеет вид

$$\frac{d\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}(t) \underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(t) + \underline{G}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}(t). \quad (2.9.5)$$

Начальные условия

$$E \left[\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(T_0) \right] = 0, E \left[\underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(T_0) \underline{\mathcal{M}}_{\Pi}^+(T_0) \right] = P_{\Pi}.$$

Здесь $\underline{F}_{\Pi}(t)$ и $\underline{G}_{\Pi}(t)$ – матрицы, описывающие динамику системы. Их элементы в общем случае являются непрерывными функциями времени. В частном случае \underline{F}_{Π} и \underline{G}_{Π} могут быть инвариантными во времени. $\underline{v}_{\Pi}(t)$ – комплексный гауссов случайный процесс с нулевым средним и ковариационной матрицей $E \left[\underline{v}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}^+(\tau) \right] = \theta_{\Pi} \delta(t - \tau)$, где E – знак математического ожидания, знак + означает комплексно-сопряженную операцию транспонирования. θ_{Π} – эрмитова матрица с неотрицательно-определенной действительной частью. Предполагается, что $E \left[\underline{v}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}^T(\tau) \right] = 0$ при любых t и τ , T – знак транспонирования.

Принятую смесь сигнала с помехами запишем в комплексной форме

$$\underline{Z}'(t) = \underline{\mathcal{M}} \underline{Z}_r(t) + \underline{\mathcal{M}}_{\Pi} \underline{Z}_{\Pi}(t) + \underline{\Theta}(t), \quad t \in T_{\alpha}, \quad (2.9.6)$$

где $\underline{\mathcal{M}} \underline{Z}_r(t)$ – полезный сигнал ($r = 1, \dots, m$). Его комплексная огибающая

$$\underline{\mathcal{M}} = \mu_c - j\mu_s = |\underline{\mathcal{M}}| e^{j\psi}. \quad (2.9.7)$$

$\underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_r(t) + j\tilde{\underline{Z}}_r(t)$ – детерминированная функция.

В этом параграфе рассматривается квазидетерминированный сигнал.

$\Theta(t) = \xi(t) - j\tilde{\xi}(t)$ – комплексный гауссов процесс с нулевым средним, со спектральной плотностью мощности ν^2 .

Для определения алгоритма оптимального приема воспользуемся концепцией порождающего (обновляющего) процесса [65]. Порождающий процесс определяется выражением

$$\zeta_r(t) = \text{Re} \left[\underline{Z}'(t) - \hat{Y}(t) \right], \quad (2.9.8)$$

где $\hat{Y}(t) = \hat{Z}_{\Pi}^{(\ominus)}(t) + \hat{Z}_r(t)$ – оценка сигнала и узкополосной помехи по критерию минимума среднего квадрата ошибки, полученная из наблюдений $\underline{Z}'(t)$ до текущего момента времени. В общем случае оценка $\hat{Y}(t)$ нелинейна. Для гауссовых процессов оптимальное оценивание линейно. В дальнейшем остановимся более подробно на этом случае. Если сигнал детерминированный, то $\hat{Z}_r(t) = \underline{\mathcal{M}}Z_r(t)$.

Найдем оценку узкополосной помехи по наблюдаемой реализации $\underline{Z}'(t)$

$$\hat{Z}_{\Pi}^{(\ominus)}(t) = \int_{t_0}^t [\underline{Z}'(\tau) - \underline{\mathcal{M}}Z_r(\tau)] \mathcal{G}_{\Pi}(t, \tau) d\tau = \hat{Z}_{\Pi}(t) - \underline{\mathcal{M}}Z_r^{\Pi}(t). \quad (2.9.9)$$

Здесь $\mathcal{G}_{\Pi}(t, \tau)$ – комплексная импульсная переходная характеристика фильтра оценки узкополосной помехи;

$$\hat{Z}_{\Pi}(t) = \int_{t_0}^t \underline{Z}'(\tau) \mathcal{G}_{\Pi}(t, \tau) d\tau = \hat{\underline{\mathcal{M}}}_{\Pi}(t) \underline{Z}_{\Pi}(t) \quad (2.9.10)$$

– оценка узкополосной помехи;

$$\underline{Z}_r^{\Pi}(t) = \int_{t_0}^t \underline{Z}_r(\tau) \mathcal{G}_{\Pi}(t, \tau) d\tau \quad (2.9.11)$$

– сигнальная функция $\underline{Z}_r(t)$ на выходе фильтра оценки узкополосной помехи.

С учетом (2.9.9)–(2.9.11) выражение (2.9.8) примет вид

$$\begin{aligned} \zeta_r(t) &= \text{Re} \left\{ \underline{Z}'(t) - \hat{Z}_{\Pi}(t) - \underline{\mathcal{M}} \left[\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_r^{\Pi}(t) \right] \right\} = \\ &= \text{Re} \left[\underline{Z}'(t) - \hat{Z}_{\Pi}(t) - \underline{\mathcal{M}}Z_r^{(\ominus)}(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.9.12)$$

Рассуждая аналогично [65], нетрудно показать, что порождающий процесс (2.9.12) представляет собой белый гауссов шум с нулевым средним и спектральной плотностью мощности ν^2 . Поэтому

$$\underline{Z}'(t) = \underline{\mathcal{M}}\underline{Z}_r^{(\ominus)}(t) + \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) + \underline{\zeta}_r(t)$$

и отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно l -го можно записать в форме

$$\Lambda_{r,l} = \frac{\int_{G(\theta)} W(\theta) \mathcal{F}(\underline{Z}'/\underline{Z}_r, \theta) d\theta}{\int_{G(\theta)} W(\theta) \mathcal{F}(\underline{Z}'/\underline{Z}_l, \theta) d\theta}, \quad r \neq l, \quad (2.9.13)$$

где

$$\mathcal{F}(\underline{Z}'/\underline{Z}_r, \theta) = \text{Re} \left\{ \exp \left(\frac{\underline{\mathcal{M}}}{\nu^2} \int_{T_\alpha} [\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)] \underline{Z}_r^{(\ominus)*}(t) dt \right) \right\} - \frac{|\underline{\mathcal{M}}|^2}{2\nu^2} \int_{T_2} |\underline{Z}_r^{(\ominus)}(t)|^2 dt \quad (2.9.14)$$

– функционал отношения правдоподобия принятого сигнала $\underline{Z}'(t)$ при передаче $\underline{Z}_r(t)$;

$$\underline{Z}_r^{(\ominus)}(t) = \underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_r^{(\Pi)}(t); \quad (2.9.15)$$

$W(\theta)$ – плотность вероятностей параметров сигнала $\theta = \{\mu, \varphi\}$.

Из (2.9.13), (2.9.14) с учетом (2.2.1) алгоритм приема полностью известного сигнала определится неравенством

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ \underline{\mathcal{M}} \int_{T_\alpha} [\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)] [\underline{Z}_r^{(\ominus)}(t)]^* dt - \frac{|\underline{\mathcal{M}}|^2}{2} \int_{T_\alpha} |\underline{Z}_r^{(\ominus)}(t)|^2 dt \right\} > \\ & > \text{Re} \left\{ \underline{\mathcal{M}} \int_{T_\alpha} [\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)] [\underline{Z}_l^{(\ominus)}(t)]^* dt - \frac{|\underline{\mathcal{M}}|^2}{2} \int_{T_\alpha} |\underline{Z}_l^{(\ominus)}(t)|^2 dt, \right. \quad (2.9.16) \\ & \left. r \neq l. \right. \end{aligned}$$

Из (2.9.16) видно, что при когерентном приеме из принятой смеси вычитается оценка помехи $\hat{Z}_{\Pi}(t)$, оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки, после чего происходит перемножение полученной разности на образец сигнала $Z_r^{(\Theta)}(t)$ с учетом влияния на него фильтра оценки узкополосной помехи. Пороговый уровень также учитывает факт влияния на сигнал переходной характеристики $G_{\Pi}(t, \tau)$.

Введем обозначения

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{T_\alpha} [\underline{Z}'(t) - \hat{Z}_{\Pi}(t)] [\underline{Z}_r^{(\Theta)}(t)]^* dt = X_r - jY_r, \quad (2.9.17)$$

$$B_r = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{E_c} \left[\int_{T_\alpha} \underline{Z}_r^*(t) \underline{Z}_r^{\Pi}(t) dt - \frac{1}{2} \int_{T_\alpha} |\underline{Z}_r^{\Pi}(t)|^2 dt \right] \right\}, \quad (2.9.18)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{T_\alpha} |\underline{Z}_r(t)|^2 dt. \quad (2.9.19)$$

С учетом этих обозначений алгоритм (2.9.16) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left[\underline{M} \underline{V}_r^* \right] - \frac{1}{2} |\underline{M}|^2 E_c B_r > \operatorname{Re} \left[\underline{M} \underline{V}_l^* \right] - \frac{1}{2} |\underline{M}|^2 E_c B_l, \quad (2.9.20)$$

$r \neq l$

который по форме совпадает с (2.8.13).

Для сигналов с одинаковыми энергиями и симметричном воздействии узкополосных помех на сигналы $B_r = B_l$ отпадает необходимость в пороговых уровнях, при этом

$$\operatorname{Re} \left[\underline{M} \underline{V}_r^* \right] > \operatorname{Re} \left[\underline{M} \underline{V}_l^* \right], \quad r \neq l. \quad (2.9.21)$$

Если сигналы известны с точностью до фазы Ψ , то алгоритм приема надо усреднить по всем Ψ . Рассмотрим практически интересный случай равномерного распределения фазы на интервале $0 \div 2\pi$. Тогда в (2.9.13), учитывая обозначения (2.9.17), (2.9.18), после усреднения получим

$$\Lambda_{r,l} = \frac{I_0\left(\frac{\mu}{v^2}|V_{-r}|\right)\exp\left(-\frac{\mu^2 E_c B_r}{2v^2}\right)}{I_0\left(\frac{\mu}{v^2}|V_{-l}|\right)\exp\left(-\frac{\mu^2 E_c B_l}{2v^2}\right)}, \quad r \neq l, \quad (2.9.22)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $\mu = |\underline{M}|$;

$$|V_{-r}| = \frac{1}{2} \left| \int_{T_\alpha} [\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_\Pi(t)] [\underline{Z}_r^{(3)}(t)]^* dt \right|. \quad (2.9.23)$$

В соответствии с (2.9.22) и (2.2.1) алгоритм некогерентного приема определяется соотношением

$$\ln I_0\left(\frac{\mu}{v^2}|V_{-r}|\right) - \frac{\mu^2 E_c B_r}{2v^2} > \ln I_0\left(\frac{\mu}{v^2}|V_{-l}|\right) - \frac{\mu^2 E_c B_l}{2v^2}, \quad r \neq l. \quad (2.9.24)$$

Для сигналов равной энергии и при условии

$$B_r = \text{const}(r) \quad (2.9.25)$$

правило решения (2.9.24) упрощается и принимает вид

$$|V_{-r}| > |V_{-l}|, \quad r \neq l, \quad (2.9.26)$$

или эквивалентно

$$|V_{-r}|^2 > |V_{-l}|^2, \quad r \neq l. \quad (2.9.27)$$

При неизвестных μ , заданных своими распределениями, следует усреднить (2.9.22) в соответствии с $W(\mu)$, в частности при релеевских распределениях μ , алгоритм принимает вид

$$\frac{\overline{h^2|V_{-r}|^2}}{v^2 E_c (1 + h^2 B_r)} - \frac{\overline{h^2|V_{-l}|^2}}{v^2 E_c (1 + h^2 B_l)} > \ln \frac{1 + \overline{h^2 B_r}}{1 + h^2 B_l}, \quad (2.9.28)$$

совпадающий по форме с (2.8.28).

Основным отличием алгоритмов этого параграфа от полученных ранее является способ формирования оценки узкополосной помехи $\hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)$ и порогового уровня, зависящего от $\underline{Z}_r^{\Pi}(t)$. Формирование $\hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)$ и $\underline{Z}_r^{\Pi}(t)$ целесообразно с помощью метода уравнений состояния [34]. В условиях полной априорной информации о процессе (2.9.1) оценка комплексной амплитуды, $\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)$ определяется известными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}(t)\hat{\underline{M}}(t) + K_{\Pi}(t) \left[\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)\underline{Z}_{\Pi}(t) \right], \quad (2.9.29)$$

где

$$K_{\Pi}(t) = \underline{G}_{\Pi}(t, t) = \varepsilon_{\Pi}(t)\underline{Z}_{\Pi}^+(t)/v^2 \quad (2.9.30)$$

– коэффициент передачи оптимального фильтра оценок; $\varepsilon_{\Pi}(t)$ – матрица ошибок фильтрации, определяемая дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{\Pi}(t)}{dt} = & \underline{F}_{\Pi}(t)\varepsilon_{\Pi}(t) + \varepsilon_{\Pi}(t)\underline{F}_{\Pi}^+(t) - \varepsilon_{\Pi}(t)\underline{Z}_{\Pi}^+(t)\frac{1}{v^2}\underline{Z}_{\Pi}(t)\varepsilon_{\Pi}(t) + \\ & + \underline{G}_{\Pi}(t)\theta_{\Pi}\underline{G}_{\Pi}^T(t), \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.9.31)$$

Начальные условия:

$$\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t_0) = 0, \quad \varepsilon_{\Pi}(t_0) = E \left[\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t_0)\hat{\underline{M}}_{\Pi}^+(t_0) \right]. \quad (2.9.32)$$

В общем случае динамическая система, генерирующая вектор состояния $\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)$, задана не полностью. Уравнение (2.9.5) задано с точностью до вектора параметров \underline{b} , следовательно, решение уравнения траектории (2.9.29) зависит от вектора неизвестных параметров \underline{b} , поэтому оценка $\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)$ должна определяться одновременно с оценкой параметров \underline{b} . Для формирования оценок полным методом уравнений состояния методами динамической адаптации [209].

Критерием качества оценки $\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)$ является минимум функционала

$$\begin{aligned} J \left[\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t) \right] = & E \left\{ \left[\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t) - \underline{M}_{\Pi}(t) \right]^+ \left[\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t) - \underline{M}_{\Pi}(t) \right] \right\} = \\ = & E \left[\underline{Z}(\underline{M}_{\Pi}, \hat{\underline{M}}_{\Pi}) \right], \end{aligned} \quad (2.9.33)$$

который достигается на траектории (2.9.29).

Функционал (2.9.33) вектора $\hat{\underline{M}}_{\Pi}(t)$ можно рассматривать и как функционал вектора b :

$$J(b, t) = E \left\{ Z \left[\underline{M}_{\Pi}(t), \hat{\underline{M}}_{\Pi}(b, t) \right] \right\}. \quad (2.9.34)$$

Условию оптимальности соответствует равенство нулю градиента функционала (2.9.34) по вектору b

$$\nabla_b J(b, t) = 0$$

или

$$E \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\underline{M}}}{\partial b} \right)^+ \nabla_{\underline{M}} Z \left[\underline{M}_{\Pi}(t), \hat{\underline{M}}_{\Pi}(b, t) \right] \right\} = 0. \quad (2.9.35)$$

Из условия (2.9.35) следует алгоритм адаптации относительно вектора b [209]

$$\frac{db(t)}{dt} = -\Gamma_b(t) \left(\frac{\partial \hat{\underline{M}}}{\partial b} \right)^+ \left\{ \nabla_{\mathbf{M}} Z \left[\underline{M}_{\Pi}(t), \hat{\underline{M}}_{\Pi}(b, t) \right] \right\}, \quad (2.9.36)$$

где $\Gamma_b(t)$ – матрица, определяющая скорость сходимости алгоритма.

В действительности узкополосная помеха наблюдается в шумах. Поэтому, учитывая, что градиент функционала $E \left\{ Z \left[\underline{M}_{\Pi}(t), \hat{\underline{M}}_{\Pi}(b, t) \right] \right\}$ равен градиенту функционала $E \left\{ Z \left[\underline{Z}'(t), \hat{\underline{M}}_{\Pi}(t) \underline{Z}_{\Pi}(t) \right] \right\}$, из (2.9.36) получим алгоритм

$$\frac{db(t)}{dt} = \Gamma_b(t) \left(\frac{\partial \hat{\underline{M}}_{\Pi}}{\partial b} \right)^+ \underline{Z}_{\Pi}^+(t) \left[\underline{Z}'(t) - \underline{Z}_{\Pi}(t) \hat{\underline{M}}_{\Pi}(t) \right]. \quad (2.9.37)$$

Здесь $\frac{\partial \hat{\underline{M}}_{\Pi}}{\partial b}$ – матрица чувствительности решений уравнения траектории (2.9.29) по компонентам вектора b [134]:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi 1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi 1}}{\partial b_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi n}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi n}}{\partial b_n} \end{bmatrix}. \quad (2.9.38)$$

После вычисления полной производной оценки $\hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)$

$$\frac{d\hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(b,t)}{\partial b} \frac{db(t)}{dt}$$

с учетом (2.9.29)–(2.9.31), (2.9.37) алгоритмы динамической адаптации примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)}{dt} &= F_{\Pi}(t)\hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t) + [\varepsilon_{\Pi}(t)Z_{\Pi}^+(t)]\frac{1}{v^2} + \\ &+ \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} \Gamma_b(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} \right)^+ Z_{\Pi}^+(t) [Z'(t) - \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)Z_{\Pi}(t)]; \end{aligned} \quad (2.9.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{\Pi}(t)}{dt} &= F_{\Pi}(t)\varepsilon_{\Pi}(t) + \varepsilon_{\Pi}(t)F_{\Pi}^+(t) - \left[\varepsilon_{\Pi}(t)Z_{\Pi}^+(t)/v^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} \Gamma_b(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} \right)^+ Z_{\Pi}^+(t) \right] Z_{\Pi}(t)\varepsilon_{\Pi}(t) + G_{\Pi}(t)\theta_{\Pi}G_{\Pi}^+(t); \end{aligned} \quad (2.9.40)$$

$$\frac{db(t)}{dt} = \Gamma_b(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}}{\partial b} \right)^+ Z_{\Pi}^+(t) [Z'(t) - \hat{\mathcal{M}}_{\Pi}(t)Z_{\Pi}(t)]. \quad (2.9.41)$$

С течением времени элементы матрицы $\Gamma_b(t)$ стремятся к нулю, при выполнении условий Роббинса–Монро, поэтому уравнения (2.9.39), (2.9.40) приближаются к соответствующим уравнениям оценки и дисперсии ошибок фильтра Калмана–Бьюси.

Далее определим $Z_r^{\Pi}(t)$ (2.9.11) в форме

$$\underline{Z}_r^\Pi(t) = \hat{S}(t)\underline{Z}_\Pi(t). \quad (2.9.42)$$

Рассуждая аналогично [34, т. 3, с. 287], можно вывести дифференциальное уравнение для $\hat{S}(t)$

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \underline{F}_\Pi(t)\hat{S}(t) + \frac{1}{v^2}\underline{\varepsilon}_\Pi(t)\underline{Z}_\Pi^+(t)\left[\underline{Z}_r(t) - \hat{S}(t)\underline{Z}_\Pi(t)\right], \quad (2.9.43)$$

которое совместно с (2.9.39)–(2.9.41) будет определять $\underline{Z}_r^\Pi(t)$.

Таким образом, моделированием дифференциальных уравнений (2.9.39)–(2.9.43), например, цифровыми методами, можно найти необходимые оценки $\hat{\underline{Z}}_\Pi(t)$ и $\underline{Z}_r^\Pi(t)$, а следовательно, и величины \underline{V}_r и B_r (2.9.17), (2.9.18), которые определяют алгоритмы приема сигналов в рассматриваемых условиях.

Представляет интерес найти \underline{V}_r в другой, эквивалентной форме. Для этого запишем (2.9.17) в виде

$$\frac{\underline{V}_r}{v^2} = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_\alpha} dt \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{H}(t, \tau) \underline{Z}'(\tau) d\tau \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{H}^*(t, x) \underline{Z}_r^*(x) dx, \quad (2.9.44)$$

где

$$\underline{H}(t, \tau) = \left(\frac{1}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\delta(t - \tau) - \underline{G}_\Pi(t - \tau) \right]. \quad (2.9.45)$$

Здесь $\underline{G}_\Pi(t - \tau)$ – импульсная характеристика фильтра оценки помехи. Интервал оценивания в (2.9.44) $T_0 \div T_\alpha$ принят совпадающим с интервалом решения (в общем случае они могут отличаться).

Введем в рассмотрение обратное ядро

$$B^{-1}(\tau, x) = \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{H}(t, \tau) \underline{H}^*(t, x) dt, \quad T_\alpha > \tau, \quad x > T_0, \quad (2.9.46)$$

связанное с корреляционной функцией смеси помех с шумом соотношением

$$\int_{T_0}^{T_\alpha} B^{-1}(\tau, x) B(x, u) dx = \delta(\tau - u), \quad (2.9.47)$$

где

$$B(x, u) = v^2 \delta(x - u) + B_{\Pi}(x, u). \quad (2.9.48)$$

В (2.9.48)

$$B_{\Pi}(x, u) = E \left[\underline{Z}_{\Pi}(x) \underline{\mathcal{M}}_{\Pi}(x) \underline{\mathcal{M}}_{\Pi}^+(u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u) \right] = \underline{Z}_{\Pi}(x) B_{\mathcal{M}}(x, u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u). \quad (2.9.49)$$

Из (2.9.44) с учетом (2.9.46) получим

$$\frac{V_r}{v^2} = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_{\alpha}} \int \underline{Z}'(\tau) B^{-1*}(\tau, x) \underline{Z}_r^*(x) d\tau dx \quad (2.9.50)$$

или вводя обозначение

$$\underline{G}_r(\tau) = \int_{T_0}^{T_{\alpha}} B^{-1}(\tau, x) \underline{Z}_r(x) dx, \quad T_{\alpha} \geq \tau \geq T_0, \quad (2.9.51)$$

имеем

$$\frac{V_r}{v^2} = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_{\alpha}} \underline{Z}'(\tau) \underline{G}_r^*(\tau) d\tau. \quad (2.9.52)$$

Здесь функция $\underline{G}_r(\tau)$ в соответствии с (2.9.47), (2.9.48), (2.9.51) определяется неоднородным уравнением Фредгольма:

$$\underline{Z}_r(t) = \int_{T_0}^{T_{\alpha}} B_{\Pi}(t, u) \underline{G}_r(u) du + v^2 \underline{G}_r(t), \quad T_{\alpha} \geq t \geq T_0, \quad (2.9.53)$$

или с учетом (2.9.49)

$$\underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_{\Pi}(t) \int_{T_0}^{T_{\alpha}} B_{\mathcal{M}}(t, u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u) \underline{G}_r(u) du + v^2 \underline{G}_r(t). \quad (2.9.54)$$

Решение таких уравнений методами переменных состояния приведено в [34, т. 2, п. 6]. Оно связано с переходом от интегральных уравнений к дифференциальным, что значительно упрощает как решение, так и моделирование их, в особенности с привлечением ЭВМ.

Для перехода от (2.9.54) к дифференциальным уравнениям вводится функция

$$\underline{S}_r(t) = \int_{T_0}^{T_\alpha} B_{\mathcal{M}}(t, u) \underline{Z}_\Pi^+(u) \underline{G}_r(u) du, \quad T_\alpha \geq t \geq T_0, \quad (2.9.55)$$

которая определяется уравнениями

$$\frac{d\underline{S}_r(t)}{dt} = \underline{F}_\Pi(t) \underline{S}_r(t) + \underline{G}_\Pi(t) \underline{\theta}_\Pi \underline{Z}_\Pi^+(t) \underline{\eta}(t), \quad (2.9.56)$$

$$\frac{d\underline{\eta}(t)}{dt} = \frac{1}{v^2} \underline{Z}_\Pi^+(t) \underline{Z}_\Pi(t) \underline{S}_r(t) - \underline{F}_\Pi^+(t) \underline{\eta}(t) - \frac{1}{v^2} \underline{Z}_\Pi^+(t) \underline{Z}_r(t), \quad (2.9.57)$$

$$\underline{S}_r(T_0) = P_\Pi \underline{\eta}(T_0), \quad \underline{\eta}(T_\alpha) = 0. \quad (2.9.58)$$

С учетом (2.9.55) уравнение (2.9.54) можно записать в виде

$$\underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_\Pi(t) \underline{S}_r(t) + v^2 \underline{G}_r(t), \quad T_\alpha \geq t \geq T_0, \quad (2.9.59)$$

откуда следует выражение для $\underline{G}_r(t)$

$$\underline{G}_r(t) = \frac{1}{v^2} [\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_\Pi(t) \underline{S}_r(t)]. \quad (2.9.60)$$

Используя (2.9.60) в (2.9.52), получим

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}'(t) [\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_\Pi(t) \underline{S}_r(t)] dt, \quad (2.9.61)$$

где $\underline{S}_r(t)$ – определяется моделированием уравнений (2.9.56)–(2.9.58).

В частном случае разложимого ядра корреляционной функции

$$B_\Pi(t, u) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{\Phi}_i(t) \underline{\Phi}_i^*(u), \quad (2.9.62)$$

где λ_i и $\underline{\Phi}_i(t)$ – собственные числа и собственные функции ядра. Обратное ядро $B^{-1}(t, u)$ можно представить в виде

$$B^{-1}(t, u) = \frac{1}{v^2} \left[\delta(t - u) - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + v^2} \underline{\Phi}_i(t) \underline{\Phi}_i^*(u) \right]. \quad (2.9.63)$$

Подстановка (2.9.63) в (2.9.51) дает

$$\underline{G}_r(t) = \frac{1}{v^2} \left[\underline{Z}_r(t) - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \underline{\Phi}_i(t)}{\lambda_i + v^2} \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}_r(u) \underline{\Phi}_i^*(u) du \right]. \quad (2.9.64)$$

Вводя обозначения

$$\overline{h_{\Pi i}^2} = \frac{\lambda_i}{v^2}, \quad \underline{G}_{ri}(t) = \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}_r(t) \underline{\Phi}_i^*(t) dt \quad (2.9.65)$$

и используя (2.9.64) в (2.9.52), получим

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}'(t) \left[\underline{Z}_r^*(t) - \sum_{i=1}^k \frac{\overline{h_{\Pi i}^2} \underline{G}_{ri}^*}{1 + \overline{h_{\Pi i}^2}} \underline{\Phi}_i^*(t) \right] dt, \quad (2.9.66)$$

что совпадает по форме с (2.8.22) для квазидетерминированной помехи.

Таким образом, в общем случае, приемник должен содержать специализированный аналоговый или цифровой вычислитель для моделирования уравнений (2.9.39)–(2.9.43) или (2.9.56)–(2.9.58) с целью формирования функций $\hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)$, $\hat{\underline{Z}}_r^{(\Pi)}(t)$ или $\underline{G}_r(t)$. Задача существенно упрощается в тех случаях, когда помехи имеют разложимое ядро корреляционной функции. Разложимое ядро можно организовать, используя специальные виды сигналов, например составные.

В заключение несколько слов о помехоустойчивости приема. При когерентном приеме вероятность ошибки определяется выражением (2.4.20), в котором h_3^2 согласно (2.9.16) определяется формулой

$$h_3^2 = \frac{\mu^2}{2v^2} \left\{ \int_{T_0}^{T_\alpha} \left| \underline{Z}_1^{(\varepsilon)}(t) \right|^2 dt - \operatorname{Re} \left[\int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}_1^{(\varepsilon)}(t) \underline{Z}_2^{*(\varepsilon)}(t) dt \right] \right\}. \quad (2.9.67)$$

В случае разложимого ядра корреляционной функции помех с учетом (2.9.64) получим

$$\begin{aligned}
h_3^2 &= \mu^2 \int_{T_0}^{T_\alpha} [\underline{Z}_1(t) - \underline{Z}_2(t)] [\underline{G}_1(t) - \underline{G}_2(t)]^* dt = \\
&= \frac{\mu^2}{\nu^2} \left\{ \int_{T_0}^{T_\alpha} |\underline{Z}_1(t) - \underline{Z}_2(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \nu^2} \left| \int_{T_0}^{T_\alpha} [\underline{Z}_1(t) - \underline{Z}_2(t)] \underline{\Phi}_i^*(t) dt \right|^2 \right\} = \\
&= h^2 \left(1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\overline{h_{\Pi i}^2} g_i^2}{1 + h_{\Pi i}^2} \right), \quad (2.9.68)
\end{aligned}$$

что совпадает с (2.7.12) при введении следующих обозначений

$$g_i^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{T_0}^{T_\alpha} [\underline{Z}_1(t) - \underline{Z}_2(t)] \underline{\Phi}_i^*(t) dt \right|^2 = g_{01i}^2 + g_{02i}^2 - 2g_{12}^{(i)}, \quad (2.9.69)$$

где

$$\begin{aligned}
g_{0ri}^2 &= |\underline{G}_{ri}|^2, \quad (r=1,2), \quad G_{ri} \text{ определяется (2.9.65);} \\
g_{12}^{(i)} &= \frac{1}{E_c} \left(x_i^{(\Pi 1)} x_i^{(\Pi 2)} + y_i^{(\Pi 1)} y_i^{(\Pi 2)} \right), \quad (2.9.70)
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
x_i^{(\Pi r)} &= \int_{T_0}^{T_\alpha} \operatorname{Re}[\underline{Z}_r(t)] \operatorname{Re}[\underline{\Phi}_i(t)] dt, \\
y_i^{(\Pi r)} &= \int_{T_0}^{T_\alpha} \operatorname{Re}[\underline{Z}_r(t)] \operatorname{Im}[\underline{\Phi}_i(t)] dt. \quad (2.9.71)
\end{aligned}$$

При некогерентном приеме ортогональных сигналов по правилу (2.9.26) вероятность ошибки определяется формулой (2.5.16), в которой h_3^2 равно

$$h_3^2 = \frac{\mu^2}{2\nu^2} \int_{T_0}^{T_\alpha} |\underline{Z}_r^{(\varepsilon)}(t)|^2 dt = \frac{\mu^2}{2\nu^2} \int_{T_0}^{T_\alpha} |\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_r^\Pi(t)|^2 dt. \quad (2.9.72)$$

В случае разложимого ядра корреляционной функции помех

$$\begin{aligned}
h_3^2 &= \frac{\mu^2}{2v^2} \int_{T_0}^{T_\alpha} |\underline{Z}_r(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + v^2} \left| \int_{T_0}^{T_\alpha} \underline{Z}_r(t) \underline{\Phi}_i^*(t) dt \right|^2 = \\
&= h^2 \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{\overline{h_{\Pi i}^2} g_{0i}^2}{1 + \overline{h_{\Pi i}^2}} \right), \quad (2.9.73)
\end{aligned}$$

что совпадает с (2.7.18) при $k = 1$.

В условиях замираний сигналов вероятность ошибки определяется известными выражениями, в которых h_3^2 определяется формулами (2.9.67), (2.9.72) при замене в них μ^2 на среднестатистическое $\mu_0^2 = \overline{\mu^2}$.

В общем случае определение помехоустойчивости приема довольно сложно, поскольку связано с решением системы уравнений (2.9.39)–(2.9.43). Наиболее простой путь предполагает моделирование на ЭВМ. Анализ показывает, что вероятность ошибки с течением времени уменьшается в соответствии с изменением ошибки фильтрации узкополосных помех в шуме, стремясь к значению, зависящему от неустранимой ошибки фильтрации. Ошибка фильтрации зависит от формы спектра помех. Для иллюстрации на рис. 2.9.1 приведены зависимости относительной ошибки фильтрации при разных $\sigma_{\Pi}^2 / \alpha_{\Pi} v^2$ от нормированного времени $\alpha_{\Pi} t$ для однополосного спектра помех. Однополосный спектр является хорошей аппроксимацией для манипулированных помех. Параметр $\sigma_{\Pi}^2 / \alpha_{\Pi} v^2$ представляет собой отношение мощности узкополосной помехи к мощности шума в полосе воздействующей помехи, $\alpha_{\Pi} t$ – характеризует время, нормированное к интервалу корреляции помехи.

Из рисунка видно, насколько быстро в зависимости от мощности воздействующих помех ошибка фильтрации приближается к своему предельному значению. Практически за время интервала корреляции помех ошибка фильтрации достигает своего предельного значения. Такой же характер имеет изменение вероятности ошибочного приема. При этом оказывается, что при значениях $\sigma_{\Pi}^2 / \alpha_{\Pi} v^2$, характерных для реальных каналов связи, высокая достоверность приема может быть достигнута только вследствие избыточности по сигналу. Для помех с разложимым ядром корреляционной функции этот результат следует непосредственно из полученных формул (2.9.68), (2.9.73).

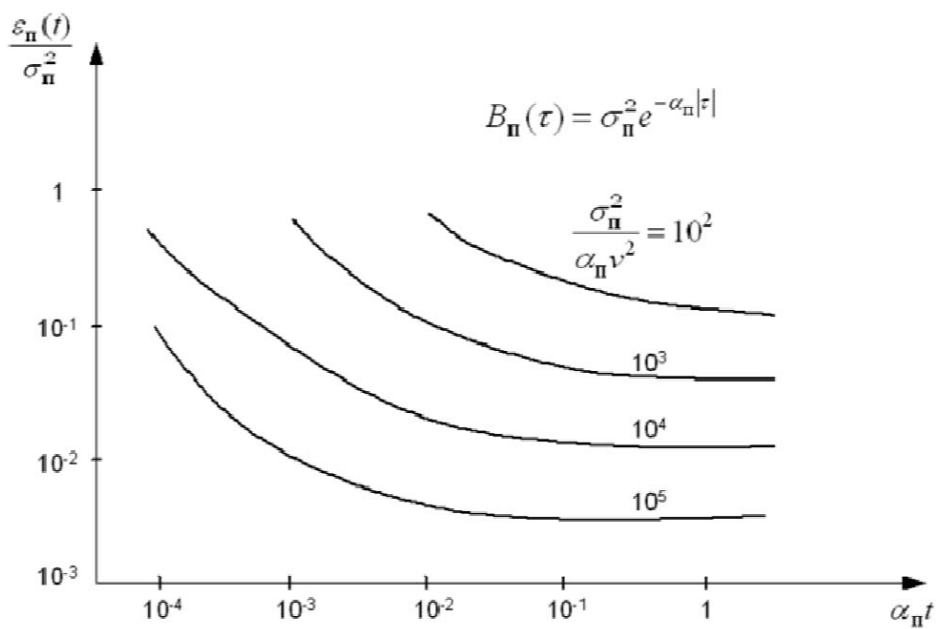


Рис. 2.9.1. Остаточная ошибка фильтрации для однополосного спектра

3. АДАПТИВНЫЙ ОДИНОЧНЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО СИГНАЛУ И ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ

3.1. Вводные замечания

Приступая к исследованию адаптивного одиночного приема дискретных сообщений с обучением по сигналу и по узкополосным помехам, отметим, что в настоящее время имеется довольно большое число работ, в которых с различных позиций рассматриваются вопросы построения адаптивных систем. В последние годы опубликован ряд монографий [101, 130, 155, 206, 209 и др.], в которых дан обстоятельный обзор и обширная библиография по затронутой проблеме. Большое внимание в них уделяется итерационным методам построения адаптивных алгоритмов. Значительный интерес представляют адаптивные асимптотически оптимальные алгоритмы приема сигналов [101].

Адаптивный прием сигналов с неизвестными параметрами в каналах с флуктуационными помехами рассматривался в [4, 87, 111 и др.]. В данной главе приведем систематическое изложение результатов исследования одиночного адаптивного приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам. При этом основное внимание уделим синтезу адаптивных алгоритмов двух видов:

- 1) с обучением по сигналу после предварительного обучения по узкополосным помехам с помощью классифицированной обучающей выборки помех;
- 2) с обучением по сигналу и по узкополосным помехам с помощью неклассифицированной последовательности принятых реализаций.

Второй важной задачей этой главы является анализ помехоустойчивости полученных алгоритмов и выяснение основных закономерностей поведения рассматриваемых приемников.

3.2. Алгоритмы приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам

Найдем адаптивные алгоритмы приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам. Пусть поступающая на вход приемника смесь сигнала с помехами имеет вид (2.1.1). В соответствии с критерием идеального наблюдателя для априорно равновероятных сигналов правило для принятия решения о приеме r -го варианта сигнала определяется неравенством

$$\ln \Lambda_{r/l} > 0, \quad r \neq l, \quad (3.2.1)$$

где $\Lambda_{r/l}$ – отношение правдоподобия для r -го варианта сигнала относительно l -го, усредненное по всем неизвестным параметрам сигнала и помех (2.2.2). Адаптивный алгоритм приемника получим заменой априорных распределений параметров сигнала и помех апостериорными, сформированными при помощи обучающих выборок. При этом обучение по узкополосным помехам возможно с помощью классифицированной либо неклассифицированной выборки. В соответствии с этим прием с обучением по сигналу может осуществляться двумя способами. В первом случае обучение по сигналу ведется после обучения по

узкополосным помехам. Это возможно в каналах с достаточно медленными изменениями параметров, когда обучение по узкополосным помехам осуществляется с помощью классифицированной выборки (2.2.5). Во втором случае обучение по сигналу и по узкополосным помехам ведется одновременно с помощью неклассифицированной обучающей выборки, что целесообразнее при быстрых изменениях параметров канала. Обучение по сигналу происходит при помощи обучающей выборки

$$\mathcal{Z}'_{(N+1)}(t), \mathcal{Z}'_{(N+2)}(t), \dots, \mathcal{Z}'_K(t), \dots, \mathcal{Z}'_M(t), \quad (3.2.2)$$

где $\mathcal{Z}'_K(t)$ определяется выражением (2.1.1).

После замены в (2.2.2) априорных распределений параметров $W(\mu)$ и $W(\mu_{\Pi})$ апостериорными $W(\mu/\mathcal{Z}'_M)$ и $W(\mu_{\Pi}/\mathfrak{x}^{(N)})$, сформированными с помощью обучающих выборок (3.2.2), (2.2.5), отношение правдоподобия будет определяться выражением:

$$\Lambda_{rl} = \frac{\int W(\mu/\mathcal{Z}'_M)W(\mu_{\Pi}/\mathfrak{x}^{(N)})\mathcal{F}(\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi})d\mu d\mu_{\Pi}}{\int_{G(\mu, \mu_{\Pi})} W(\mu/\mathcal{Z}'_M)W(\mu_{\Pi}/\mathfrak{x}^{(N)})\mathcal{F}(\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}_l, \mu, \mu_{\Pi})d\mu d\mu_{\Pi}}. \quad (3.2.3)$$

Здесь $\mathcal{F}(\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi})$ – функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\mathcal{Z}'(t)$ на интервале решения при передаче сигнала $\mathcal{Z}_r(t)$ (2.2.3). Апостериорное распределение параметров узкополосных помех $W(\mu_{\Pi}/\mathfrak{x}^{(N)})$ было определено в параграфах 2.2 и 2.6. Найдем апостериорное распределение параметров сигнала по формуле Байеса

$$W(\mu/\mathcal{Z}'_M) = W(\mu_c, \mu_s/\mathcal{Z}'_M) = \frac{W(\mu_c, \mu_s)\mathcal{F}_M(\mathcal{Z}'_M/\mu_c, \mu_s)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int W(\mu_c, \mu_s)\mathcal{F}_M(\mathcal{Z}'_M/\mu_c, \mu_s)d\mu_c d\mu_s}. \quad (3.2.4)$$

В (3.2.4) $\mathcal{F}_M(\mathcal{Z}'_M/\mu_c, \mu_s)$ представляет собой функционал отношения правдоподобия обучающей выборки (3.2.2) после усреднения по апостериорному распределению параметров узкополосных помех

$$\mathcal{F}_M(\mathcal{Z}'_M/\mu_c, \mu_s) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\mu_{\Pi}/\mathfrak{x}_N)\mathcal{F}(\mathcal{Z}'_M/\mu_c, \mu_s, \mu_{\Pi})d\mu_{\Pi} =$$

$$= \text{const} \exp \left\{ \frac{1}{2\hat{\sigma}_c^2} \left[2(\mu_c m_c + \mu_s m_s) - (\mu_c^2 + \mu_s^2) B_\Sigma \right] \right\}. \quad (3.2.5)$$

Здесь

$$m_c = \frac{1}{M-N} \sum_{k=N+1}^M \hat{\mu}_c^{(k)}, \quad m_s = \frac{1}{M-N} \sum_{k=N+1}^M \hat{\mu}_s^{(k)}, \quad (3.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_c^{(k)} &= \frac{1}{E_c} \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\mathcal{Z}'_k(t) - \hat{\mathcal{Z}}_n(t) \right] \sum_{r=1}^m \mathcal{Z}_r(t) dt = \sum_{r=1}^m \frac{X_r^{(k)}}{E_c}, \\ \hat{\mu}_s^{(k)} &= \frac{1}{E_c} \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\mathcal{Z}'_k(t) - \hat{\mathcal{Z}}_n(t) \right] \sum_{r=1}^m \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) dt = \sum_{r=1}^m \frac{Y_r^{(k)}}{E_c}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

– максимально правдоподобные оценки параметров сигнала на k -м этапе наблюдения; $\hat{\sigma}_c^2 = \frac{v^2}{2E_c}$ – дисперсия этих оценок; $\hat{\mathcal{Z}}_{\Pi}(t)$ – оценка совокупности узкополосных помех в форме (2.2.22) или (2.6.13); m – алфавит сигнала;

$$B_\Sigma = \sum_{r=1}^m B_r; \quad (3.2.8)$$

B_r определяется (2.2.25).

Оценки в форме (3.2.7) и коэффициент B_Σ (3.2.8) определяется по неклассифицированной обучающей выборке сигнала в виде суммы входных реализаций, которые позволяют упростить построение схемы приемника сигналов с активной паузой. При обучении по классифицированной (идеально или реально) выборке сигнала в (3.2.7) и (3.2.9) используется только один член суммы по r , соответствующий сигналу, по которому ведется обучение. Реально классифицированную обучающую выборку сигнала можно получить, например, при помощи обратной связи по решению в приемнике.

Для определения апостериорного распределения вероятностей параметров сигнала (3.2.4) необходимо знать априорное распределение на первом этапе наблюдения. При достаточно большом объеме обучающей выборки или при достаточно больших значениях отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума, более или менее безразлично каким будет априорное распределение. Для примера возьмем нормальное априорное распределение (2.2.40). После подстановки в (3.2.4) выражений (3.2.5), (2.2.40) и необходимых

преобразований, получим апостериорное распределение вероятностей параметров сигнала

$$W(\mu_c, \mu_s / \mathbf{Z}'_M) = \frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} \left[(\mu_c - m_c^{(a)})^2 + (\mu_s - m_s^{(a)})^2 \right] \right\}, \quad (3.2.9)$$

где

$$m_c^{(a)} = \frac{m_s}{B_\Sigma} \frac{(M-N)\overline{h^2}B_\Sigma}{1 + (M-N)\overline{h^2}B_\Sigma}, \quad (3.2.10)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\hat{\sigma}_c^2}{(M-N)B_\Sigma} \frac{(M-N)\overline{h^2}B_\Sigma}{1 + (M-N)\overline{h^2}B_\Sigma}. \quad (3.2.11)$$

Здесь $\overline{h^2}$ определяется (2.4.38).

При условии

$$(M-N)\overline{h^2}B_\Sigma \gg 1 \quad (3.2.12)$$

соотношения (3.2.10), (3.2.11) примут вид

$$m_c^{(a)} = \frac{m_s}{B_\Sigma}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\hat{\sigma}_c^2}{(M-N)B_\Sigma}, \quad (3.2.13)$$

т. е. параметры априорного распределения параметров сигнала не влияют на параметры апостериорного распределения. Условие (3.2.12) выполняется при $(M-N) \gg 1$ и произвольных $\overline{h^2}B_\Sigma$, или при любых $(M-N)$ и $\overline{h^2}B_\Sigma \gg 1$.

При этом априорное распределение $W(\mu_c, \mu_s)$ можно считать равномерным.

Подставляя в (3.2.3) апостериорные распределения параметров сигнала (3.2.9) и узкополосных помех (2.2.14) либо (2.6.7) и интегрируя вначале по $\mathbf{\mu}_\Pi$, затем по $\mathbf{\mu}$, в соответствии с (3.2.1) получим адаптивный алгоритм работы приемника с обучением по сигналу и по узкополосным помехам в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v^2 \left(B_\Sigma + \frac{B_r}{M-N} \right)} \left[2(m_c X_r + m_s Y_r) - (m_c^2 + m_s^2) \frac{E_c B_r}{B_\Sigma} + (X_r^2 + Y_r^2) \frac{1}{(M-N)E_c} \right] - \\
& - \frac{1}{v^2 \left(B_\Sigma + \frac{B_l}{M-N} \right)} \left[2(m_c X_l + m_s Y_l) - (m_c^2 + m_s^2) \frac{E_c B_l}{B_\Sigma} + (X_l^2 + Y_l^2) \frac{1}{(M-N)E_c} \right] > \\
& > \ln \frac{B_\Sigma + \frac{B_r}{M-N}}{B_\Sigma + \frac{B_l}{M-N}}, \quad r \neq l. \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

Адаптивный алгоритм (3.2.14) построен таким образом, что с течением времени, по мере увеличения объема наблюдаемых данных, происходит изменение его структуры. Вначале приемник работает как некогерентный. Так, при $(M-N) = 1$ неравенство (3.2.14) представляет собой алгоритм оптимального приемника по обобщенному критерию максимального правдоподобия, т. е. с оценкой неизвестных параметров сигнала на интервале одного элемента. По мере увеличения объема обучающей выборки сигнала $(M-N)$ алгоритм (3.2.14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_\Sigma} \left[m_{cr} X_r + m_{sr} Y_r - (m_{cr}^2 + m_{sr}^2) \frac{E_c B_r}{2B_\Sigma} \right] > \frac{1}{B_\Sigma} \left[m_{cl} X_l + m_{sl} Y_l - (m_{cl}^2 + m_{sl}^2) \frac{E_c B_l}{2B_\Sigma} \right], \\
r \neq l, \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

который совпадает с алгоритмом работы адаптивного приемника, построенного на принципе замены неизвестных параметров сигнала их оценками. Такой алгоритм гораздо проще, чем (3.2.14), т. к. его структура на всех этапах наблюдения остается неизменной, меняются только параметры блоков формирования оценок сигнала и узкополосных помех и пороговых уровней.

Покажем, что в каналах с нулевой скоростью изменения параметров сигнала и узкополосных помех при $M-N \rightarrow \infty$ из (3.2.14) следует алгоритм оптимального когерентного приемника для точно известного сигнала, а при $N \rightarrow \infty$ и для точно известных узкополосных помех, т. е. алгоритм (3.2.14) сходится к оптимальному для каналов с белым шумом. В этом смысле будем называть его асимптотически оптимальным.

Прежде всего убедимся в состоятельности оценок сигнала m_c и m_s . Для этого развернем выражения (3.2.6) подстановкой в них формул (3.2.7) с учетом (2.1.1). Получим

$$m_c = \mu_c^{(0)} + \frac{1}{(M-N)E_c} \int_{NT}^{MT} \xi(t) \mathbf{Z}_r(t) dt - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{1}{(N+1)E_c E_{\Pi i}} \left[x_i^{(\Pi r)} \int_0^{NT} \xi(t) \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) dt + y_i^{(\Pi r)} \int_0^{NT} \xi(t) \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t) dt \right]. \quad (3.2.16)$$

Аналогично можно развернуть m_s . Из (3.2.16) имеет место следующее соотношение для среднеквадратичного расстояния

$$\left\| m_{cs} - \mu_{cs}^{(0)} \right\| = \sqrt{\left| m_{cs} - \mu_{cs}^{(0)} \right|^2} = \frac{v^2}{2E_c} \sqrt{\frac{1}{M-N} + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{g_{0ri}^2}{N+1}} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty, M - N \rightarrow \infty$,

поэтому $\lim_{\substack{M-N \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} m_{cs} = \mu_{cs}^{(0)}$, (3.2.17)

т. е. $\mu_{cs}^{(0)}$ является пределом в среднеквадратичном для оценок m_{cs} . Из сходимости в среднеквадратичном в соответствии с неравенством Чебышева следует

сходимость по вероятности, что доказывает состоятельность оценок m_{cs} . Таким образом, в каналах с неизменными параметрами оценки m_{cs} сходятся к истинным значениям параметров сигнала при увеличении размеров обучающих выборок $M - N$ и N . Подставляя в (3.2.14) оценки m_{cs} и учитывая (3.2.17), убеждаемся в сходимости алгоритма к оптимальному для каналов с белым шумом по мере увеличения объема наблюдаемых данных, т. е. алгоритм (3.2.14) состоятелен.

Далее покажем, что алгоритм, построенный по принципу замены неизвестных параметров сигнала и узкополосных помех их совместными оценками, сформированными при помощи неклассифицированной (по помехам) последовательности принятых реализаций, совпадает по форме с (3.2.15) (при $N = 0$).

Решающее правило в данном случае будет определяться неравенством (3.2.1), в котором отношение правдоподобия можно представить соотношением:

$$\Lambda_{rl} = \frac{\int_{G(\mu, \mu_{\Pi})} \delta(\mu - \hat{\mu}) \delta(\mu_{\Pi} - \hat{\mu}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi}) d\mu d\mu_{\Pi}}{\int_{G(\mu, \mu_{\Pi})} \delta(\mu - \hat{\mu}) \delta(\mu_{\Pi} - \hat{\mu}_{\Pi}) \mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_l, \mu, \mu_{\Pi}) d\mu d\mu_{\Pi}}, \quad (3.2.18)$$

где $\mathcal{F}(\mathcal{Z}' / \mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi})$ – функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\mathcal{Z}'(t)$ на интервале решения при передаче сигнала $\mathcal{Z}_r(t)$ (2.2.3);

$\delta(\mu - \hat{\mu})$ – дельта-функция Дирака;

$\hat{\mu} = \{\hat{\mu}_c, \hat{\mu}_s\}$, $\hat{\mu}_{\Pi} = \{\hat{\mu}_{c\Pi i}, \hat{\mu}_{s\Pi i}\} i = 1, \dots, N_{\Pi}$ – оценки параметров сигнала и узкополосных помех.

Согласно (3.2.1) и (3.2.18) с учетом (2.2.3) адаптивный алгоритм приемника, построенного на принципе замены неизвестных параметров сигнала и узкополосных помех их оценками, будет определяться следующим неравенством:

$$\begin{aligned} & \int_T \mathcal{Z}'(t) \left[\hat{\mathcal{Z}}'_r(t) + \hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi}(t) \right] dt - \frac{1}{2} \int_T \left[\hat{\mathcal{Z}}'_r(t) + \hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi}(t) \right]^2 dt > \\ & > \int_T \mathcal{Z}'(t) \left[\hat{\mathcal{Z}}'_l(t) + \hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi}(t) \right] dt - \frac{1}{2} \int_T \left[\hat{\mathcal{Z}}'_l(t) + \hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi}(t) \right]^2 dt, \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

В (3.2.19) введены обозначения:

$$\hat{\mathcal{Z}}'_r = m'_{cr} \mathcal{Z}_r(t) + m'_{sr} \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) \quad (3.2.20)$$

– оценка r -го варианта сигнала;

$$\hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \hat{\mathcal{Z}}'_{\Pi i}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left[m'_{c\Pi i} \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) + m'_{s\Pi i} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) \right] \quad (3.2.21)$$

– оценка совокупности узкополосных помех.

Для формирования оценок используется обучающая выборка (3.2.2) при $N = 0$:

$$\mathcal{Z}'_1(t), \mathcal{Z}'_2(t), \dots, \mathcal{Z}'_k(t), \dots, \mathcal{Z}'_M(t), \quad (3.2.22)$$

где $\mathcal{Z}'_k(t)$ определяется (2.1.1).

Функционал отношения правдоподобия обучающей выборки (3.2.22) можно представить в виде:

$$\mathcal{F}_M(\mathbf{Z}_M/\mu, \mu_{\Pi}) = \exp \left\{ \frac{2}{\nu^2} \sum_{k=1}^M \int_{(k-1)T}^{kT} \left[\mathbf{Z}'_k(t) \left[\mu_c \mathbf{Z}_r(t) + \mu_s \tilde{\mathbf{Z}}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \mu_{c\Pi i} \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i} \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left[\mu_c \mathbf{Z}_r(t) + \mu_s \tilde{\mathbf{Z}}_r(t) + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left(\mu_{c\Pi i} \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) + \mu_{s\Pi i} \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t) \right) \right]^2 \right] dt \right\}. \quad (3.2.23)$$

Найдем совместные максимально правдоподобные оценки параметров сигнала и помех путем решения системы уравнений:

$$\frac{d \ln \mathcal{F}_M(\mathbf{Z}'_M/\mu, \mu_{\Pi})}{d\mu} = 0, \quad \frac{d \ln \mathcal{F}_M(\mathbf{Z}'_M/\mu, \mu_{\Pi})}{d\mu_{\Pi}} = 0. \quad (3.2.24)$$

В результате получим

$$m'_{cr} = \frac{m_{cr}}{B_r} = \frac{1}{ME_c B_r} \sum_{k=1}^M \left[x_k^{(r)} E_c - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left(x_{ki}^{(\Pi)} x_i^{(\Pi r)} + y_{ki}^{(\Pi)} y_i^{(\Pi r)} \right) \right], \quad (3.2.25)$$

$$m'_{sr} = \frac{m_{sr}}{B_r} = \frac{1}{ME_c B_r} \sum_{k=1}^M \left[y_k^{(r)} E_c + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \left(x_{ki}^{(\Pi)} y_i^{(\Pi r)} - y_{ki}^{(\Pi)} x_i^{(\Pi r)} \right) \right].$$

$$m'_{c\Pi i} = \frac{1}{ME_{\Pi i} B_r} \sum_{k=1}^M \left[x_{ki}^{(\Pi)} E_{\Pi i} - x_k^{(r)} x_i^{(\Pi r)} + y_{ki}^{(r)} y_i^{(\Pi r)} \right], \quad (3.2.26)$$

$$m'_{s\Pi i} = \frac{1}{ME_{\Pi i} B_r} \sum_{k=1}^M \left[y_{ki}^{(\Pi)} E_{\Pi i} + x_k^{(r)} y_i^{(\Pi r)} - y_k^{(r)} x_i^{(\Pi r)} \right].$$

В (3.2.25), (3.2.26) обозначено:

$$x_k^{(r)} = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{Z}'_k(t) \mathbf{Z}_r(t) dt, \quad y_k^{(r)} = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{Z}'_k(t) \tilde{\mathbf{Z}}_r(t) dt; \quad (3.2.27)$$

$$x_{ki}^{(\Pi)} = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{Z}'_k(t) \mathbf{Z}_{\Pi i}(t) dt, \quad y_{ki}^{(\Pi)} = \int_{(k-1)T}^{kT} \mathbf{Z}'_k(t) \tilde{\mathbf{Z}}_{\Pi i}(t) dt; \quad (3.2.28)$$

$x_i^{(\Pi r)}, y_i^{(\Pi r)}$ определяются выражениями (2.4.9).

После подстановки в (3.2.19) оценок (3.2.20) и (3.2.21) с учетом (3.2.25), (3.2.26) и соответствующих преобразований получим адаптивный алгоритм с самообучением по узкополосным помехам

$$\frac{1}{B_r} \left[m_{cr} X_r + m_{sr} Y_r - (m_{cr}^2 + m_{sr}^2) \frac{E_c}{2} \right] > \frac{1}{B_l} \left[m_{cl} X_l + m_{sl} Y_l - (m_{cl}^2 + m_{sl}^2) \frac{E_c}{2} \right], r \neq l, \quad (3.2.29)$$

совпадающий по форме с (3.2.15) (при $N=0$).

Вводя обозначения

$$X'_r = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X_r^{(k)} = m_{cr} E_c, \quad Y'_r = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M Y_r^{(k)} = m_{sr} E_c, \quad (3.2.30)$$

запишем алгоритм (3.2.29) в виде

$$\frac{1}{B_r} \left[X_r X'_r + Y_r Y'_r - \frac{1}{2} (X_r'^2 + Y_r'^2) \right] > \frac{1}{B_l} \left[X_l X'_l + Y_l Y'_l - \frac{1}{2} (X_l'^2 + Y_l'^2) \right], r \neq l. \quad (3.2.31)$$

Здесь X_r, Y_r определяются (2.2.20).

3.3. Вопросы реализации алгоритмов приема с совместным обучением по сигналу и помехам

Алгоритмы приема (3.2.29), (3.2.31), использующие совместные оценки сигнала и узкополосных помех, сформированные при помощи неклассифицированной (по помехам) последовательности принятых реализаций представляет большой практический интерес. Поэтому рассмотрим возможные варианты схемной реализации решающих правил (3.2.29), (3.2.31). Для этого конкретизируем их применительно к двоичным сигналам.

Противоположные сигналы. Для противоположных сигналов характерно симметричное воздействие узкополосных помех на оба варианта сигнала ($B_1 = B_2$), что существенно упрощает алгоритм. В каналах с переменными параметрами прием противоположных сигналов, как известно [126], можно реализовать системами с измерением параметров канала на предыдущем элементе или на M предыдущих элементах. Поэтому решающее правило приема должно предусматривать обучение по сигналу и по узкополосным помехам. Измерение параметров канала (обучение по сигналу) при $M > 1$ принципиально должно проводиться по классифицированной (идеально или реально) выборке, т. е. со снятием манипуляции, поэтому $m_{c1} = m_{c2}$, $m_{s1} = m_{s2}$ и правило (3.2.31) преобразуется так:

$$X'_1 X_1 + Y'_1 Y_1 > 0. \quad (3.3.1)$$

Здесь величины X'_1 и Y'_1 , сформированные по (3.2.30) на интервале $0 \div MT$, используются для приема $(M+1)$ -го элемента сигнала, поэтому

$$X_1 = x^{(1)} - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{1}{E_{\Pi i}} \left(x_i^{(\Pi)} x_i^{(\Pi\Pi)} + y_i^{(\Pi)} y_i^{(\Pi\Pi)} \right), \quad (3.3.2)$$

$$Y_1 = y^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{1}{E_{\Pi i}} \left(x_i^{(\Pi)} y_i^{(\Pi)} - y_i^{(\Pi)} x_i^{(\Pi\Pi)} \right),$$

где
$$x^{(1)} = \int_{MT}^{(M+1)T} \mathcal{Z}'(t) \mathcal{Z}_1(t) dt, \quad y^{(1)} = \int_{MT}^{(M+1)T} \mathcal{Z}'(t) \tilde{\mathcal{Z}}_1(t) dt; \quad (3.3.3)$$

$$x_i^{(\Pi)} = \int_{MT}^{(M+1)T} \mathcal{Z}'(t) \mathcal{Z}_{\Pi i}(t) dt, \quad y_i^{(\Pi)} = \int_{MT}^{(M+1)T} \mathcal{Z}'(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi i}(t) dt. \quad (3.3.4)$$

Один из вариантов схемы реализации решающего правила (3.3.1) на перемножителях приведен на рис. 3.3.1. Особенностью схемы, в отличие от каналов с белым шумом, является формирование величин X_1 и Y_1 (а не $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$) по правилу (3.3.2). Величины X_1 и Y_1 перемножаются с предварительно накопленными в блоке $\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M$ оценками X'_1 и Y'_1 (3.2.30), после чего произведения

$X_1 X'_1$ и $Y_1 Y'_1$ суммируются и сравниваются с нулевым порогом, согласно (3.3.1), для вынесения решения о приеме соответствующего варианта сигнала.

Возможна также реализация решающего правила на основе согласованных фильтров. Для рассмотрения характеристик согласованных фильтров удобно представить алгоритм (3.3.1) в комплексной форме

$$\operatorname{Re} \underline{V}_1 \underline{U}_1^* > 0, \quad (3.3.5)$$

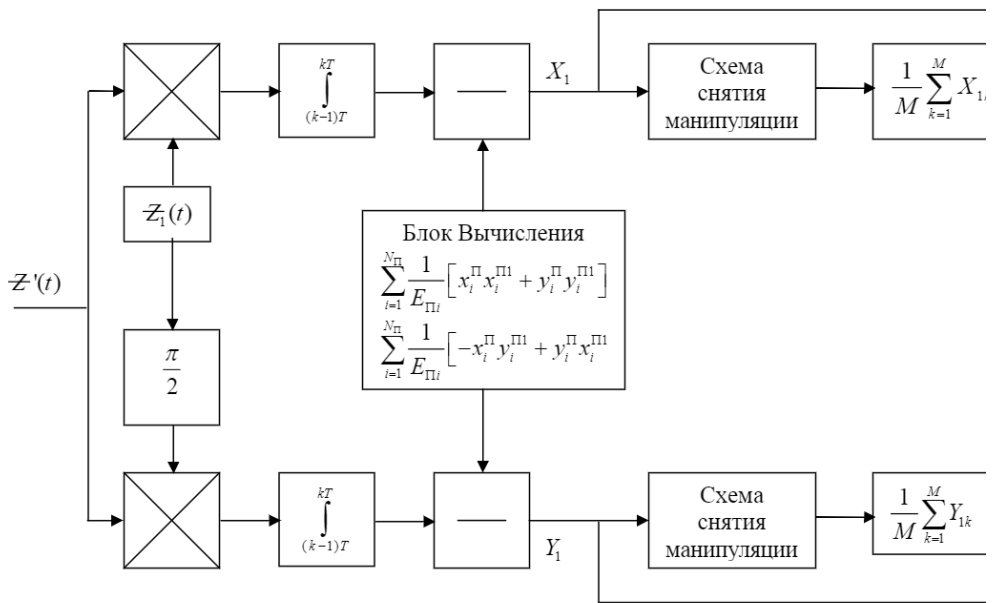


Рис. 3.3.1. Схема адаптивного приема противоположных сигналов

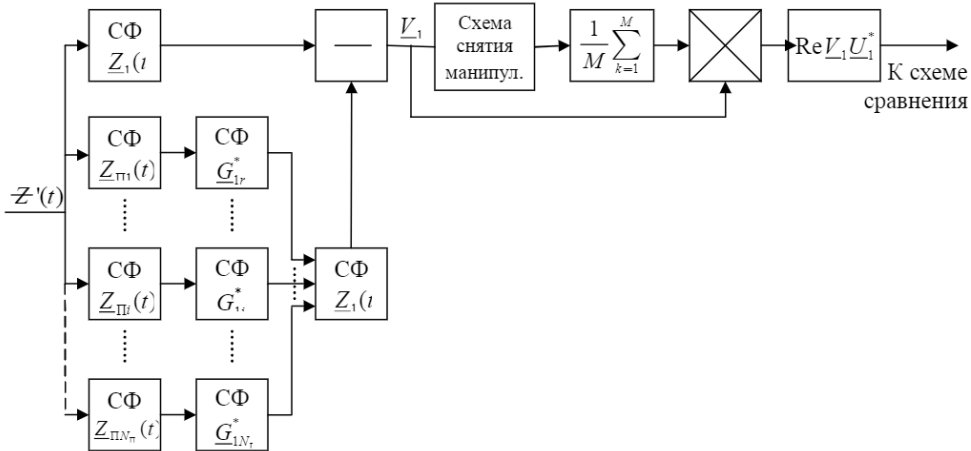


Рис. 3.3.2. Вариант схемы с согласованными фильтрами

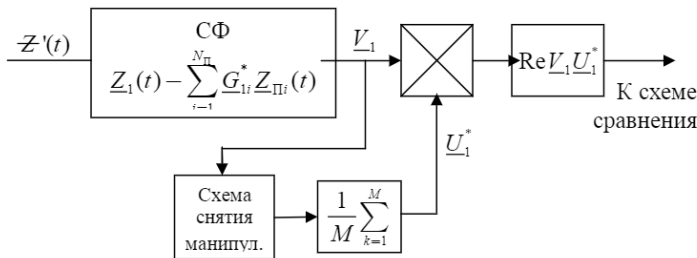


Рис. 3.3.3. Реализация на основе единого адаптивного согласованного фильтра

Первый член в правой части (3.3.6) может быть получен на выходе фильтра, согласованного с аналитическим сигналом $Z_1(t)$, т. е. имеющего комплексную импульсную реакцию вида (2.8.26). Каждое слагаемое (по i) второго члена (3.3.6) есть взвешенное с весом G_{1i}^* напряжение на выходе фильтра, согласованного с $Z_{\Pi i}(t)$, т. е. имеющего импульсную реакцию (2.8.27).

Функциональная схема реализации решающего правила (3.3.5) приведена на рис. 3.3.2. Взвешенные напряжения на выходах согласованных с узкополосными помехами фильтров вычитаются из напряжения на выходе фильтра сигнала, образуя величины V_1 . Эти величины перемножаются с предварительно накопленными (за время MT) комплексными оценками U_1 . Действительная

часть произведения $(\text{Re}V_1U_1^*)$ согласно (3.3.5) поступает на схему сравнения с нулевым порогом для вынесения решения о принятом сигнале.

Тракт обработки сигнала можно реализовать также на основе единого адаптивного согласованного фильтра, имеющего согласно (3.3.6) комплексную импульсную характеристику вида (2.8.21). Функциональная схема приемника для этого случая показана на рис. 3.3.3. Эффективная реализация такой схемы возможна на базе адаптивного многополюсного согласованного фильтра [144, п. 3.5].

Ортогональные в усиленном смысле сигналы. Адаптивный алгоритм приема двоичных ортогональных сигналов следует непосредственно из (3.2.31)

$$\frac{1}{B_1} \left[X_1 X'_1 + Y_1 Y'_1 - \frac{1}{2} (X_1'^2 + Y_1'^2) \right] > \frac{1}{B_2} \left[X_2 X'_2 + Y_2 Y'_2 - \frac{1}{2} (X_2'^2 + Y_2'^2) \right]. \quad (3.3.8)$$

Функциональная схема реализации решающего правила (3.3.8) на перемножителях приведена на рис. 3.3.4. На этом рисунке приведена схема тракта обработки первого варианта сигнала. Схема тракта обработки второго варианта сигнала идентична. Реализация решающего правила (3.3.8) возможна и на базе согласованных фильтров с характеристиками (2.8.26), (2.8.27), а также на основе единых адаптивных согласованных фильтров с характеристиками вида (2.8.21).

Алгоритм (3.3.8) и функциональная схема рис. 3.3.4 справедливы как при селективных замираниях сигналов, так и при общих. Различие только в способах формирования оценок сигнала. Селективные замирания различных позиций сигналов имеют место при использовании сигналов с неперекрывающимися спектрами. В этом случае возможен отдельный прием сигналов различных позиций, для чего необходимо располагать классифицированными обучающими выборками сигналов. Реально классифицированные обучающие выборки можно сформировать в приемнике путем использования обратной связи по решению [5], например, т. к. показано на рис. 3.3.5 (на схеме ЛЗ – линия задержки на T). В интервал обучения при этом не должен входить элемент сигнала, на котором принимается решение в данный момент, т. к. еще не принято решение о том, какой сигнал передавался в этом элементе.

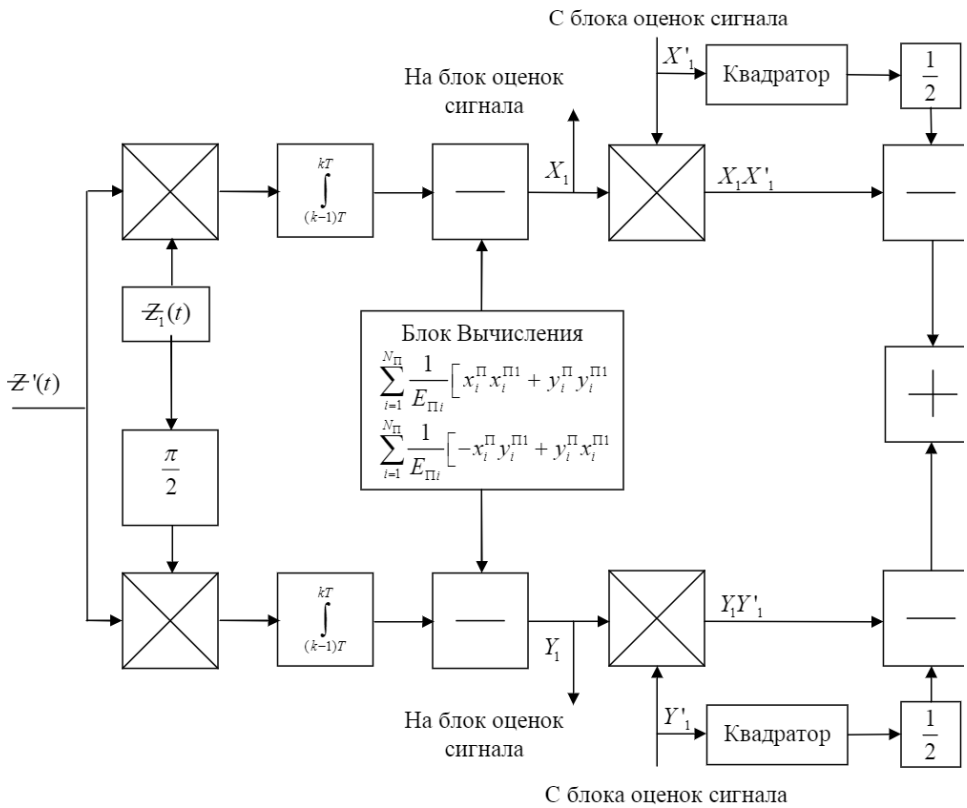


Рис. 3.3.4. Схема адаптивного приема ортогональных сигналов

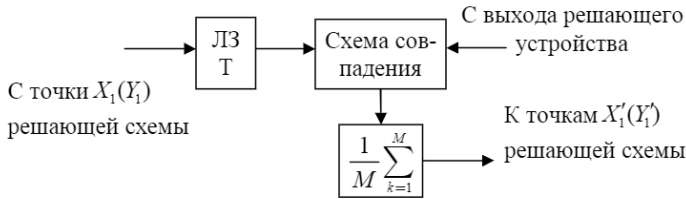


Рис. 3.3.5. Формирование оценок сигнала при селективных замираниях

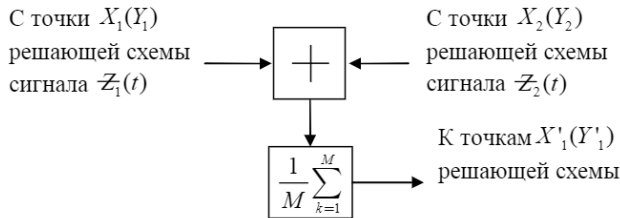


Рис. 3.3.6. Формирование оценок сигнала при общих замираниях

3.4. Помехоустойчивость адаптивного приема при совместном обучении по сигналу и помехам

Проведем анализ помехоустойчивости алгоритмов (3.3.1), (3.3.8). Ради простоты анализа будем полагать, что на каждый вариант сигнала действует одна узкополосная помеха. Отдельно рассмотрим помехоустойчивость приема противоположных сигналов и ортогональных в усиленном смысле сигналов.

Противоположные сигналы. Алгоритм приема противоположных сигналов определяется неравенством (3.3.1). Вероятность ошибки найдем как вероятность невыполнения этого неравенства при передаче первого сигнала:

$$p = \int_{-\infty}^0 W(\mathfrak{a}^{(1)}) d\mathfrak{a}^{(1)}, \quad (3.4.1)$$

$$\text{где} \quad \mathfrak{a}^{(1)} = X'_1 X_1 + Y'_1 Y_1 \quad (3.4.2)$$

– при передаче $Z_1(t)$. Найдем составляющие $\mathfrak{a}^{(1)}$. Для этого подставим в (3.2.30) и (3.3.2) соотношения (3.2.27), (3.2.28), (2.4.9), (3.3.2), (3.3.4) и $Z'(t)$ из (2.1.1). После поперодного усреднения произведений быстромменяющихся функций под знаками интегралов получим:

$$X'_1 = \frac{(1 - g_{01}^2) E_c}{MT} \int_0^{MT} \mu_c(t) dt + \frac{1}{M} \int_0^{MT} \xi(t) Z_1(t) dt - \\ - \frac{x^{(\Pi)}}{ME_{\Pi}} \int_0^{MT} \xi(t) Z_{\Pi}(t) dt - \frac{y^{(\Pi)}}{ME_{\Pi}} \int_0^{MT} \xi(t) \tilde{Z}_{\Pi}(t) dt, \quad (3.4.3)$$

$$X_1 = \frac{(1 - g_{01}^2) E_c}{T} \int_{MT}^{(M+1)T} \mu_c(t) dt + \int_{MT}^{(M+1)T} \xi(t) Z_1(t) dt - \\ - \frac{x^{(\Pi)}}{E_{\Pi}} \int_{MT}^{(M+1)T} \xi(t) Z_{\Pi}(t) dt - \frac{y^{(\Pi)}}{E_{\Pi}} \int_{MT}^{(M+1)T} \xi(t) \tilde{Z}_{\Pi}(t) dt. \quad (3.4.4)$$

Аналогично можно найти Y'_1 и Y_1 .

При релейских замираниях сигнала $\mathfrak{a}^{(1)}$ (3.4.2) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Величины X'_1 и Y'_1 , X_1 и Y_1 попарно-независимы с матрицей ковариаций

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{X_1^2} & \overline{X_1 X'_1} \\ \overline{X_1 X'_1} & \overline{X_1'^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y_1^2} & \overline{Y_1 Y'_1} \\ \overline{Y_1 Y'_1} & \overline{Y_1'^2} \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Плотность вероятности $\mathfrak{a}^{(1)}$ определяется выражениями (2.5.30). После подстановки (2.5.30) в (3.4.1) и интегрирования вероятность ошибки будет равна

$$P = \frac{\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)} + \beta^{(1)}}, \quad (3.4.6)$$

где $\gamma^{(1)} = \lambda_1$, $\beta^{(1)} = -\lambda_2$, λ_1 и λ_2 – являются собственными числами матрицы $[\mathbf{KJ}]$. Здесь \mathbf{K} – матрица ковариаций (3.4.5), $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица

квадратичной формы $\mathfrak{a}^{(1)}$. Решая характеристическое уравнение $|\mathbf{KJ} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, получим

$$\lambda_{1,2} = \overline{X'_1 X_1} \pm \sqrt{\overline{X_1'^2} \cdot \overline{X_1^2}}. \quad (3.4.7)$$

После подстановки (3.4.7) в (3.4.6) с учетом (3.4.3), (3.4.4) и преобразований вероятность ошибки при адаптивном приеме противоположных сигналов будет определяться формулой

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\overline{h^2 r_3} (1 - g_{01}^2)}{\sqrt{\overline{h^2 r_1} (1 - g_{01}^2) + \frac{1}{M} [\overline{h^2 r_2} (1 - g_{01}^2) + 1]}} \right\}, \quad (3.4.8)$$

где

$$r_1 = \frac{1}{(MT)^2} \int_0^{MT} \int R(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad r_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^{(M+1)T} \int R(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ r_3 = \frac{1}{MT^2} \int_0^{MT} \int_0^{(M+1)T} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.4.9)$$

Здесь $R(t_1, t_2) = \frac{1}{\sigma^2} \overline{\mu_c(t_1) \mu_c(t_2)} = \frac{1}{\sigma^2} \overline{\mu_s(t_1) \mu_s(t_2)}$ – корреляционная функция измеряемых параметров сигнала.

Формула (3.4.8) показывает, что вероятность ошибочного приема противоположных сигналов зависит от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума ($\overline{h^2}$), размера обучающей выборки M , коэффициентов, характеризующих скорость изменения параметров сигнала (r_1, r_2, r_3) и коэффициента различимости сигнала и узкополосной помехи в частотно-временной области (g_{01}^2). Из (3.4.8) видно, что величина коэффициента различимости g_{01}^2 должна быть меньше единицы ($g_{01}^2 < 1$), т. е. не должно быть перекрытия всех составляющих сигнала мощными узкополосными помехами в условиях быстрого изменения их параметров. Сигнал должен иметь избыточность по базе. Из формулы (3.4.8) видно также, что в каналах с конечной скоростью изменения параметров сигнала при неограниченном увеличении ($\overline{h^2}$) вероятность ошибки стремится не к нулю, а к предельному значению

$$p_{np} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_3}{\sqrt{r_1 r_2}} \right). \quad (3.4.10)$$

Предельная вероятность ошибки равна нулю только в каналах с неизменными параметрами сигнала, т. е. при $(r_1 = r_2 = r_3 = 1)$. В этом случае, при $\bar{h}^2(1 - g_{01}^2) \gg 1$, выражение (3.4.8) принимает вид:

$$P \approx \frac{1 + \frac{1}{M}}{4\bar{h}^2(1 - g_{01}^2)}. \quad (3.4.11)$$

При отсутствии сосредоточенных помех $g_{01}^2 = 0$ из (3.4.11) в зависимости от объема обучающей выборки M следуют известные выражения для вероятности ошибки при когерентном приеме сигналов с фазовой манипуляцией ($M \gg 1$) и некогерентном приеме сигналов с относительной фазовой манипуляцией ($M = 1$) в канале с белым шумом:

$$P_{M \gg 1} \approx \frac{1}{4\bar{h}^2}, \quad P_{M=1} \approx \frac{1}{2\bar{h}^2}. \quad (3.4.12)$$

Ортогональные сигналы. В соответствии с алгоритмом приема двоичных ортогональных в усиленном смысле сигналов (3.3.8) вероятность ошибки определится выражением (3.4.1), в котором

$$\mathfrak{a}^{(1)} = \frac{1}{B_1} \left[X_1 X_1' + Y_1 Y_1' - \frac{1}{2} (X_1'^2 + Y_1'^2) \right] - \frac{1}{B_2} \left[X_2 X_2' + Y_2 Y_2' - \frac{1}{2} (X_2'^2 + Y_2'^2) \right] \quad (3.4.13)$$

– при передаче сигнала $Z_1(t)$.

В целях большей наглядности рассмотрим отдельно помехоустойчивость приема при селективных замираниях сигналов различных позиций и при общих замираниях сигналов. Вначале рассмотрим случай селективных замираний. Полагаем, что выполняются условия

$$\int_T Z_r(t) Z_{\Pi k}(t) dt = 0, \quad \int_T Z_r(t) \tilde{Z}_{\Pi k}(t) dt = 0, \quad r \neq k, \quad (3.4.14)$$

т. е. узкополосные помехи действуют независимо на каждый из вариантов сигналов.

У селективно замирающих сигналов матрица ковариации $\mathfrak{a}^{(1)}$ – блочно-диагональная, состоит из блоков \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , имеющих следующий вид:

$$\mathbf{K}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right], \quad (3.4.15)$$

где

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \overline{X_1'^2} & \overline{X_1 X_1'} \\ \overline{X_1 X_1'} & \overline{X_1^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \overline{X_2'^2} & \overline{X_2 X_2'} \\ \overline{X_2 X_2'} & \overline{X_2^2} \end{bmatrix}. \quad (3.4.16)$$

Структура блока \mathbf{K}_2 аналогична для составляющих Y'_1, Y_1, Y'_2, Y_2 . Элементы этих матриц равны:

$$\begin{aligned} \overline{X_1'^2} &= \frac{1}{2} v^2 E_c (1 - g_{01}^2) \left[\bar{h}^2 r_1 (1 - g_{01}^2) + \frac{1}{M_1} \right], \\ \overline{X_1^2} &= \frac{1}{2} v^2 E_c (1 - g_{01}^2) \left[\bar{h}^2 r_2 (1 - g_{01}^2) + 1 \right], \\ \overline{X_1 X_1'} &= \frac{1}{2} v^2 E_c \bar{h}^2 r_3 (1 - g_{01})^2 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

– для блока \mathbf{K}_{11} ;

$$\begin{aligned} \overline{X_2'^2} &= \frac{1}{2} v^2 E_c \left[\bar{h}^2 r_1 (1 - g_{02}^2)^2 + \frac{1 - g_{02}^2}{M_2} \right], \\ \overline{X_2^2} &= \frac{1}{2} v^2 E_c \left[\bar{h}^2 r_2 g_{02}^4 + 1 - g_{02}^2 \right], \\ \overline{X_2 X_2'} &= -\frac{1}{2} v^2 E_c \bar{h}^2 r_3 g_{02}^2 (1 - g_{02}^2) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

– для блока \mathbf{K}_{22} .

Здесь M_1 и M_2 соответственно размер обучающей выборки для первого и второго вариантов сигнала. В дальнейшем полагаем их одинаковыми ($M_1 = M_2 = M$), r_1, r_2, r_3 определяются (3.4.9).

Плотность вероятности квадратичной формы $\mathfrak{E}^{(t)}$ определяется следующими соотношениями [203]:

$$W(\mathfrak{a}^{(r)}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{c_j^{(r)}}{1\gamma_j^{(r)}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{a}^{(r)}}{2\gamma_j^{(r)}}\right), & \mathfrak{a}^{(r)} > 0, \\ \sum_{j=1}^m \frac{d_j^{(r)}}{2\beta_j^{(r)}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{a}^{(r)}}{2\beta_j^{(r)}}\right), & \mathfrak{a}^{(r)} < 0, \end{cases} \quad (3.4.19)$$

где

$$c_j^{(r)} = \left[\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{\beta_k^{(r)}}{\gamma_j^{(r)}}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \left(1 - \frac{\gamma_k^{(r)}}{\gamma_j^{(r)}}\right) \right]^{-1},$$

$$d_j^{(r)} = \left[\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{\gamma_k^{(r)}}{\beta_j^{(r)}}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \left(1 - \frac{\beta_k^{(r)}}{\beta_j^{(r)}}\right) \right]^{-1}.$$

В (3.4.19) $\gamma_j^{(r)}$ и $\beta_j^{(r)}$ – положительные значения и модули отрицательных значений собственных чисел матрицы $[KJ]$, где J – матрица квадратичной формы $\mathfrak{a}^{(r)}$. Ее можно представить в блочно-диагональном виде с блоками

$$J_1 = J_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & J_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.4.20)$$

где

$$J_{11} = \frac{1}{2B_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{22} = \frac{1}{2B_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4.21)$$

После подстановки (3.4.19) в (3.4.1) и необходимых преобразований вероятность ошибки будет равна

$$p = \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i}{\prod_{k=1}^2 \left(1 + \frac{\gamma_k}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 (\beta_i - \beta_k)} \approx \frac{3\beta_1}{\gamma_1 + \beta_1} \frac{\beta_2}{\gamma_2 + \beta_2}. \quad (3.4.22)$$

Подставляя в (3.4.22) результат решения характеристического уравнения $|K_I J_I - \lambda I| = 0$ для матриц (3.4.15), (3.4.20) с учетом (3.4.17), (3.4.18), полу-

чим искомое выражение для вероятности ошибки при раздельном приеме селективно замирающих ортогональных сигналов

$$p \approx \frac{3}{4} \left\{ 1 - \frac{\left[\overline{h^2 r_1 (1 - g_{01}^2)} + \frac{1}{M} \right] \left[\overline{h^2 r_2 (1 - g_{01}^2)} + 1 \right] - \left[\overline{h^2 r_3 (1 - g_{01}^2)} \right]^2}{\left[\overline{h^2 (2r_3 - r_1) (1 - g_{01}^2)} - \frac{1}{M} \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{\left[\overline{h^2 r_1 (1 - g_{02}^2)^2} + \frac{1 - g_{02}^2}{M} \right] \left[\overline{h^2 r_2 g_{02}^4 - g_{02}^2} + 1 \right] - \left[\overline{h^2 r_3 g_{02}^2 (1 - g_{02}^2)} \right]^2}{\left[\overline{h^2 r_1 (1 - g_{02}^2)^2} + \frac{1}{M} (1 - g_{02}^2) + 2 \overline{h^2 r_3 g_{02}^2 (1 - g_{02}^2)} \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4.23)$$

Из (3.4.23) видно, что вероятность ошибки здесь также зависит от отношения энергии сигнала к спектральной плотности шума ($\overline{h^2}$), от коэффициентов (r_1, r_2, r_3), характеризующих скорость изменения параметров сигнала, от размера обучающей выборки M и от коэффициентов различимости сигналов и узкополосных помех (g_{01}^2, g_{02}^2) в частотно-временной области. Причем их величины должны быть ограничены сверху ($g_{01}^2 < 1, g_{02}^2 < 1$), т. е. сигнал должен иметь избыточность по базе. Вероятность ошибки не зависит от интенсивности узкополосных помех (при достаточно больших отношениях энергии узкополосных помех к спектральной плотности шума) и скорости изменения их параметров, что является следствием обучения по неклассифицированной выборке помех, и в этом его достоинство.

Из (3.4.23) следует также, что в общем случае предельная вероятность ошибки (при $\overline{h^2} \rightarrow \infty$) не равна нулю в каналах с конечной скоростью изменения параметров и равна

$$p \cong \frac{3}{4} \left[1 - \frac{2r_3 - r_1}{\sqrt{r_1 (r_1 + 4r_2 - 4r_3)}} \right] \left\{ 1 - \frac{4g_{02}^4 (r_1 r_2 - r_3)}{\left[r_1 (1 - g_{02}^2) + 2r_3 g_{02}^2 \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4.24)$$

При неизменных параметрах сигнала ($r_1 = r_2 = r_3 = 1$) и $\overline{h^2} \gg 1$ выражение (3.4.23) преобразуется к виду

$$P \approx \frac{3 \left(1 + \frac{1}{M}\right) \left(1 - g_{02}^2 + \frac{g_{02}^4}{M}\right)}{(\bar{h}^2)^2 (1 - g_{01}^2)(1 + g_{02}^2)^2}, \quad (3.4.25)$$

из которого следует, что раздельный прием селективно замирающих сигналов по помехоустойчивости эквивалентен разнесенному (сдвоенному) приему. Вероятность ошибки при этом обратно пропорциональна величине $(\bar{h}^2)^2$, а не \bar{h}^2 как при отсутствии учета селективности замираний различных позиций сигналов. Причем, обучение по сигналу на интервале одного импульса ($M=1$) приводит к энергетическому проигрышу порядка 3 дБ по сравнению с обучением на интервале MT при $M \gg 1$. При $M = 2 \div 3$ этот проигрыш уменьшается до величины 1,8–1,2 дБ. Подавление узкополосных помех, как видим, также достаточно эффективно. Например, при $g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0.5$ и $M=1$ энергетический проигрыш составляет всего 1,25 дБ по сравнению с известным выражением для вероятности ошибки ($p \approx 3/(\bar{h}^2)^2$) при приеме селективно замирающих сигналов в белом шуме, что указывает на целесообразность использования такого метода приема сигналов.

Далее рассмотрим помехоустойчивость адаптивного приема при общих замираниях сигналов различных позиций. Ограничимся случаем симметричного воздействия узкополосных помех на оба варианта ($g_{01}^2 = g_{02}^2 = g_0^2$). Проведем анализ помехоустойчивости при использовании неклассифицированной обучающей выборки сигнала в виде суммы всех входных воздействий, при этом

$$X = X'_1 + X'_2, \quad Y = Y'_1 + Y'_2. \quad (3.4.26)$$

В этих условиях алгоритм (3.4.13) преобразуется к виду

$$X(X_1 - X_2) + Y(Y_1 - Y_2) > 0. \quad (3.4.27)$$

При релейских замираниях сигналов левая часть неравенства (3.4.27) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Вероятность ошибки как вероятность невыполнения неравенства (3.4.27) при передаче первого сигнала определяется формулой (3.4.6), в которой $\gamma^{(0)} = \lambda_1$, $\beta^{(0)} = -\lambda_2$, λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы $[KJ]$. В данном случае

$$K = \begin{bmatrix} \overline{X^2} & \overline{X(X_1 - X_2)} \\ \overline{X(X_1 - X_2)} & \overline{(X_1 - X_2)^2} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4.28)$$

Причем

$$X = \frac{(1-2g_0^2)E_c}{MT} \int_0^{MT} \mu_c(t) dt + \frac{1}{M} \int_0^{MT} \xi(t) [Z_1(t) + Z_2(t)] dt - \\ - \frac{2x^{II}}{ME_{II}} \int_0^{MT} \xi(t) Z_{II}(t) dt - \frac{2y^{(III)}}{ME_{II}} \int_0^{MT} \xi(t) \tilde{Z}(t) dt, \quad (3.4.29)$$

$$X_1 - X_2 = \frac{E_c}{T} \int_{(M-1)T}^{MT} \mu_c(t) dt + \int_{(M-1)T}^{MT} \xi(t) [Z_1(t) - Z_2(t)] dt. \quad (3.4.30)$$

Вычисляя $\gamma^{(I)}$ и $\beta^{(I)}$ путем решения характеристического уравнения $|\mathbf{KJ} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ для матриц (3.4.28) и подставляя в (3.4.6), получим следующее выражение для вероятности ошибки при общих замираниях ортогональных сигналов:

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\overline{h^2} r_3 \sqrt{1-2g_0^2}}{\sqrt{\left[\overline{h^2} r_1 (1-2g_0^2) + \frac{2}{M} \right] (\overline{h^2} r_2 + 2)}} \right\}, \quad (3.4.31)$$

где

$$r_1 = \frac{1}{(MT)^2} \int_0^{MT} \int_0^{MT} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad r_2 = \frac{1}{T^2} \int_{(M-1)T}^{MT} \int_{(M-1)T}^{MT} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ r_3 = \frac{1}{MT^2} \int_0^{MT} \int_{(M-1)T}^{MT} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.4.32)$$

В отличие от предыдущих случаев здесь требуется большая избыточность сигнала по базе ($g_0^2 < 0.5$). При $g_0^2 = 0$ выражение (3.4.31) совпадает с формулой для вероятности ошибки приемника с измерением параметров сигнала в каналах с белым шумом [4]. При конечной скорости изменения параметров сигнала предельная вероятность ошибки не равна нулю, а определяется (3.4.10) с учетом (3.4.32). Из этих формул следует, что предельная вероятность ошибки равна нулю только при $M = 1$, т. е. при некогерентном приеме. Поэтому в каналах с относительно быстрыми замираниями сигналов для достижения высокой достоверности при одиночном приеме может оказаться более целесообразным некогерентный прием с обучением по узкополосным помехам.

4. АДАПТИВНЫЙ РАЗНЕСЕННЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ

4.1. Вводные замечания

В настоящее время системы разнесенного приема сигналов находят весьма широкое применение для повышения достоверности принимаемых сообщений. В последние годы в нашей стране и за рубежом опубликовано большое количество работ по вопросам теории и практики разнесенного приема, например [4, 61, 77, 102, 198, 203]. Однако большинство исследований выполнено в основном для каналов с флуктуационными шумами. Гораздо меньше работ посвящено вопросам разнесенного приема в каналах с узкополосными и флуктуационными помехами. Эти работы можно разделить на две группы. К первой группе относятся работы по исследованию закономерностей поведения систем, построенных оптимально для каналов с флуктуационным шумом, на которые действуют узкополосные помехи [70, 76, 77, 139 и др.]. Ко второй группе относятся работы по исследованию оптимальных и субоптимальных решающих правил в каналах с узкополосными и флуктуационными помехами [4, 85, 138, 140–143, 165, 169]. В этих работах не затрагивались вопросы обучения по узкополосным помехам с целью восполнения недостающей априорной информации о статистических характеристиках помех. Разнесенный прием с обучением по узкополосным помехам рассматривался в работах [144, гл.6; 170, 171, 174, 176, 178]. В данной главе приведем основные результаты исследования по вопросам синтеза и анализа разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам. Рассмотрим когерентный разнесенный прием, некогерентный с когерентным сложением сигналов и некогерентный разнесенный прием.

Будем представлять принятую смесь сигнала с помехами в q -й ($q=1, 2, \dots, Q$) ветви разнесения в виде:

$$\mathcal{Z}'_q(t) = \mu_{cq} \mathcal{Z}_r(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathcal{Z}}(t) + \mu_{cпq} \mathcal{Z}_{пq}(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathcal{Z}}_{пq}(t) + \zeta_q(t), \quad (4.1.1)$$

где Q – число ветвей разнесения; $\zeta_q(t)$ – реализация флуктуационной помехи, аппроксимируемая белым гауссовым шумом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности v_q^2 ($v_q^2 = \sigma_q^2 T$), значение которой может быть и неизвестным. В дальнейшем будем полагать, что шумы и узкополосные помехи в различных ветвях разнесения независимы.

Классифицированная обучающая выборка помех в q -й ветви разнесения имеет вид:

$$\mathfrak{X}_q^{(1)}(t), \mathfrak{X}_q^{(2)}(t), \dots, \mathfrak{X}_q^{(k)}(t), \dots, \mathfrak{X}_q^{(N)}(t), \quad (4.1.2)$$

где

$$\mathfrak{X}_q^{(k)}(t) = \mu_{cпq}^{(k)} \mathcal{Z}_{пq}(t) + \mu_{sq}^{(k)} \tilde{\mathcal{Z}}_{пq}(t) + \xi_q(t). \quad (4.1.3)$$

4.2. Алгоритмы разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам

Алгоритмы приема с обучением по узкополосным помехам определяются отношениями правдоподобия, в которых априорные распределения параметров помех заменены апостериорными, сформированными с помощью обучающих выборок. В соответствии с критерием идеального наблюдателя для априорно равновероятных передаваемых сигналов (1.3.4) с учетом (1.3.9) и (1.2.22) адаптивный алгоритм разнесенного приема можно представить в виде

$$\sum_{q=1}^Q \ln A_{r'l}^{(q)} > 0, \quad r \neq l, \quad (4.2.1)$$

где

$$A_{r'l}^{(q)} = \frac{\int_{G(\mu, \mu_n)} W_q(\mu) W_q(\mu_{\Pi} / \mathfrak{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathcal{Z}'_q / \mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi}) d\mu d\mu_{\Pi}}{\int_{G(\mu, \mu_n)} W_q(\mu) W_q(\mu_{\Pi} / \mathfrak{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathcal{Z}'_q / \mathcal{Z}_l, \mu, \mu_{\Pi}) d\mu d\mu_{\Pi}} \quad (4.2.2)$$

– отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно l -го в q -й ветви разнесения. Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q(\mathcal{Z}'_q / \mathcal{Z}_r, \mu, \mu_{\Pi}) = \exp \left\{ \frac{2}{v_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'_q(t) \left[\mu_{cq} \mathcal{Z}_r(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{c\Pi q} \mathcal{Z}_{\Pi q}(t) + \mu_{s\Pi q} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi q}(t) \right] dt - \frac{1}{v_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\mu_{cq} \mathcal{Z}_r(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathcal{Z}}_r(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{c\Pi q} \mathcal{Z}_{\Pi q}(t) + \mu_{s\Pi q} \tilde{\mathcal{Z}}_{\Pi q}(t) \right]^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

– функционал отношения правдоподобия принятой реализации в q -й ветви при передаче сигнала $\mathcal{Z}_r(t)$;

$$W_q(\mu_{\Pi} / \mathfrak{x}_N) = W_q(\mu_{c\Pi}, \mu_{s\Pi} / \mathfrak{x}_q^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}_q^{(N)}) \quad (4.2.4)$$

– апостериорное распределение параметров узкополосных помех в q -й ветви, найденное с помощью обучающей выборки (4.1.2). Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в параграфах 2.2 и 2.6 применительно к каждой ветви разнесения, можно определить $W_q(\mu_{\Pi} / \mathfrak{x}_N)$. В случае марковских изменений

параметров помех в q -й ветви апостериорное распределение вероятностей (4.2.4) будет определяться в общем случае рекуррентным соотношением типа (2.6.4). В условиях высокой точности измерения параметров помех, в гауссовом приближении, апостериорное распределение примет вид:

$$W_q(\mu_{cп}, \mu_{сп} / \mathfrak{X}_N) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Nq}^2} \exp \left[-\frac{(\mu_{cпq} - m_{cпq}^{(N)})^2 + (\mu_{спq} - m_{спq}^{(N)})^2}{2\sigma_{Nq}^2} \right], \quad (4.2.5)$$

где

$$m_{cпq}^{(N)} = \frac{m_{cпq}^{(N-1)} \hat{\sigma}_{пq}^2 R_{пq} + \hat{\mu}_{cпq}^{(N)} [\sigma_{(N-1)q}^2 R_{пq}^2 + \sigma_{пq}^2 (1 - R_{пq}^2)]}{\hat{\sigma}_{пq}^2 + \sigma_{(N-1)q}^2 R_{пq}^2 + \sigma_{пq}^2 (1 - R_{пq}^2)}, \quad (4.2.6)$$

$$\sigma_{Nq}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{пq}^2 [\sigma_{(N-1)q}^2 R_{пq}^2 + \sigma_{пq}^2 (1 - R_{пq}^2)]}{\hat{\sigma}_{пq}^2 + \sigma_{(N-1)q}^2 R_{пq}^2 + \sigma_{пq}^2 (1 - R_{пq}^2)}. \quad (4.2.7)$$

Начальные условия $m_{cпq}^{(1)} = \hat{\mu}_{cпq}, \sigma_{1q}^2 = \hat{\sigma}_{пq}^2$.

Подставляя (4.2.5) в (4.2.2) и интегрируя, можно получить адаптивные алгоритмы разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам при различных предположениях о статистических характеристиках параметров сигнала.

Когерентный разнесенный прием. Для полностью известного сигнала из (4.2.1) и (4.2.2) после усреднения по $\mu_{п}$ в соответствии с (4.2.5) получим адаптивный алгоритм когерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам в форме:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'_q(t) - \hat{\mathbf{Z}}_{пq}(t)] [\mu_{cпq} \mathbf{Z}_r(t) + \mu_{спq} \tilde{\mathbf{Z}}_r(t)] dt - \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_{cпq}^2 + \mu_{спq}^2}{2V_q^2} E_q B_{rq} > \\ & > \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'_q(t) - \hat{\mathbf{Z}}_{пq}(t)] [\mu_{cпq} \mathbf{Z}_l(t) + \mu_{спq} \tilde{\mathbf{Z}}_l(t)] dt - \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_{cпq}^2 + \mu_{спq}^2}{2V_q^2} E_q B_{lq}, \\ & \qquad \qquad \qquad r \neq l, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

где

$$\hat{Z}_{\Pi q}(t) = \frac{m_{с\Pi q}^{(N)} + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{\Pi q}^2} \cdot \frac{x_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}}}{1 + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{\Pi q}^2}} Z_{\Pi q}(t) + \frac{m_{s\Pi q}^{(N)} + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{\Pi q}^2} \cdot \frac{y_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}}}{1 + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{\Pi q}^2}} \tilde{Z}_{\Pi q}(t) \quad (4.2.9)$$

– оценка узкополосной помехи в q -й ветви разнесения, сформированная при помощи обучающей выборки. Как видим, ее формирование в общем случае происходит как на интервале решения, так и на предшествующих интервалах времени. Из (4.2.9) следуют частные случаи:

1. При $R_{\Pi q} = 1$ (неизменные параметры узкополосных помех) и $N \gg 1$

$$\hat{Z}_{\Pi q}(t) = m_{с\Pi q}^{(N)} Z_{\Pi q}(t) + m_{s\Pi q}^{(N)} \tilde{Z}_{\Pi q}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\hat{\mu}_{с\Pi q}^{(k)} Z_{\Pi q}(t) + \hat{\mu}_{s\Pi q}^{(k)} \tilde{Z}_{\Pi q}(t)]. \quad (4.2.10)$$

В этом случае, в принципе, возможна полная компенсация узкополосных помех.

2. При $R_{\Pi q} \ll 1$ (случай быстрых изменений параметров узкополосных помех) формирование оценок происходит независимо на каждом этапе наблюдения. Поэтому для подавления узкополосных помех целесообразно использовать оценки, сформированные только на интервале решения в виде

$$\hat{Z}_{\Pi q}(t) = \frac{\overline{h_{\Pi q}^2}}{1 + \overline{h_{\Pi q}^2}} \left[\frac{x_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}} Z_{\Pi q}(t) + \frac{y_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}} \tilde{Z}_{\Pi q}(t) \right] \quad (4.2.11)$$

или при $\overline{h_{\Pi q}^2} \gg 1 \left(\overline{h_{\Pi q}^2} = \frac{\overline{\mu_{\Pi q}^2} E_{\Pi q}}{\nu_q^2} \right)$

$$\hat{Z}_{\Pi q}(t) = \frac{x_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}} Z_{\Pi q}(t) + \frac{y_q^{(\Pi)}}{E_{\Pi q}} \tilde{Z}_{\Pi q}(t), \quad (4.2.12)$$

где $x_q^{(\Pi)}$ и $y_q^{(\Pi)}$ определяются (2.2.23). При этом возможна режекция составляющих сигнала, пораженных узкополосными помехами, поэтому необходима избыточность по базе сигнала. Далее в (4.2.8)

$$B_{rq} = 1 - \frac{g_{orq}^2}{1 + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\sigma_{\Pi q}^2}}, \quad (4.2.13)$$

где

$$g_{orq}^2 = \frac{1}{E_q E_{\Pi q}} [x_q^{(mr)^2} + y_q^{(mr)^2}] \quad (4.2.14)$$

– коэффициент взаимной корреляции r -го сигнала с помехой в q -й ветви; $x_q^{(mr)}$ и $y_q^{(mr)}$ определяются (2.4.9);

$$E_q = \int_{LT}^{(L+1)T} Z_r^2(t) dt = \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{Z}_r^2(t) dt;$$

$$E_{\Pi q} = \int_{(k-1)T}^{kT} Z_{\Pi q}^2(t) dt = \int_{(k-1)T}^{kT} \tilde{Z}_{\Pi q}^2(t) dt.$$

Вводя обозначения

$$X_{rq} = \int_{LT}^{(L+1)T} [Z_q'(t) - \hat{Z}_{\Pi q}(t)] Z_r(t) dt, \quad (4.2.15)$$

$$Y_{rq} = \int_{LT}^{(L+1)T} [Z_q'(t) - \hat{Z}_{\Pi q}(t)] \tilde{Z}_r(t) dt,$$

алгоритм (4.2.8) можно преобразовать к виду

$$\sum_{q=1}^Q \left[\frac{1}{v_q^2} (\mu_{cq} X_{rq} + \mu_{sq} Y_{rq}) - \frac{h_q^2 B_{rq}}{2} \right] > \sum_{q=1}^Q \left[\frac{1}{v_q^2} (\mu_{cq} X_{lq} + \mu_{sq} Y_{lq}) - \frac{h_q^2 B_{lq}}{2} \right],$$

$$r \neq l, \quad (4.2.16)$$

где

$$h_q^2 = \frac{\mu_{cq}^2 + \mu_{sq}^2}{v_q^2} E_q = \frac{\mu_q^2}{v_q^2} E_q.$$

При использовании аналитических сигналов (2.8.2) алгоритм (4.2.8) удоб-

но представить в форме

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} [Re(\underline{\mu}_{-q} V_{rq}^*) - \frac{1}{2} |\underline{\mu}_{-q}|^2 E_q B_{rq}] > \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} [Re(\underline{\mu}_{-q} V_{lq}^*) - \frac{1}{2} |\underline{\mu}_{-q}|^2 E_q B_{lq}], \quad r \neq l. \quad (4.2.17)$$

Здесь

$$\underline{V}_{rq} = \frac{1}{2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\underline{Z}'_q(t) - \hat{\underline{Z}}_{pq}(t)] \underline{Z}_r^*(t) dt, \quad (4.2.18)$$

где

$$\hat{\underline{Z}}_{pq}(t) = \hat{\underline{v}}_{pq} \underline{Z}_{pq}(t) \quad (4.2.19)$$

– комплексная оценка совокупности узкополосных помех,

$$\hat{\underline{v}}_{pq} = \frac{m_{спq}^{(N)} + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{pq}^2} \cdot \frac{x_q^{(n)}}{E_{pq}}}{1 + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{pq}^2}} - j \frac{m_{спq}^{(N)} + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{pq}^2} \cdot \frac{y_q^{(n)}}{E_{pq}}}{1 + \frac{\sigma_{Nq}^2}{\hat{\sigma}_{pq}^2}}. \quad (4.2.20)$$

Отличие полученных алгоритмов (4.2.8), (4.2.16), (4.2.17) от аналогичных им для каналов с белым шумом [4] состоит в том, что тракт обработки сигналов в каждой ветви разнесения содержит блок оценки узкополосных помех и блоки формирования пороговых уровней, зависящие от коэффициентов B_{rq} . Реализация полученных алгоритмов возможна как с помощью схем на перемножителях, так и на согласованных фильтрах. При этом структурные схемы каждой ветви разнесения подобны схемам обработки сигналов при одиночном приеме, например, представленным на рис. 2.8.1, 2.8.5–2.8.7. После обработки сигналов в трактах Q ветвей разнесения суммарное выходное напряжение поступает на схему сравнения, где принимается решение о передаваемом сигнале.

Алгоритм обработки существенно упрощается для сигналов с активной паузой с одинаковыми энергиями и при симметричном воздействии узкополосных помех на все варианты сигнала, т. е. при условии

$$h_{rq}^2 = h_q^2 = const(r); \quad B_{rq} = B_q = const(r). \quad (4.2.21)$$

Тогда отпадает необходимость в формировании пороговых уровней и алгоритм (4.2.16) принимает вид:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} (\mu_{cq} X_{rq} + \mu_{sq} Y_{rq}) > \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} (\mu_{cq} X_{lq} + \mu_{sq} Y_{lq}), \quad (4.2.22)$$

Алгоритм когерентного разнесенного приема двоичных сигналов с пассивной паузой можно получить из (4.2.16), если приравнять нулю правую часть неравенства. Тогда решение о наличии сигнала принимается при условии

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} (\mu_{cq} X_{lq} + \mu_{sq} Y_{lq}) > \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2 B_{lq}}{2}. \quad (4.2.23)$$

Решение об отсутствии сигнала принимается при обратном знаке этого неравенства.

В условиях воздействия стохастических узкополосных помех, алгоритм когерентного разнесенного приема с учетом обозначений (2.9.17), (2.9.18) по структуре совпадает с (4.2.17). Однако входящие в \underline{V}_{rq} и B_{rq} функции $\underline{Z}_{pq}(t)$ и $\underline{Z}_{rq}^{\Pi}(t)$ имеют свои особенности формирования. Оценка помехи $\hat{\underline{Z}}_{pq}(t)$ формируется путем моделирования дифференциальных уравнений (2.9.39)–(2.9.41) с помощью цифровых вычислителей, а $\underline{Z}_{rq}^{(\Theta)}(t)$ и B_{rq} учитывает влияние на сигнал фильтра оценки узкополосной помехи путем вычитания из $\underline{Z}_r(t)$ функции $\underline{Z}_{rq}^{\Pi}(t)$, которая моделируется дифференциальными уравнениями (2.9.42), (2.9.43). В случае разложимого ядра корреляционной функции помех приходим к алгоритму приема для квазидетерминированных помех (при $R_{\Pi} = 0$).

Рассмотренные алгоритмы получены в предположении известной спектральной плотности шума V_q^2 . Если она неизвестна, то ее нетрудно оценить при помощи обучающей выборки (4.1.2). Запишем n -мерную плотность распределения вероятности реализации флуктуационного шума в q -й ветви разнесения в виде:

$$\begin{aligned} W_q(\xi / \underline{Z}_{pq}) &= (2\pi\sigma_q^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_q^2} \sum_{k=1}^n \xi_k^2\right) = \\ &= (2\pi\sigma_q^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_q^2} \sum_{k=1}^n [\mathfrak{x}_q^{(k)} - \mu_{сП}^{(k)} \underline{Z}_{pq}^{(k)} - \mu_{сп}^{(k)} \tilde{\underline{Z}}_{pq}^{(k)}]^2\right\}. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial \ln W_q(\xi / \mathcal{Z}_{nq})}{\partial \boldsymbol{\mu}_{c\pi}} = 0, \quad \frac{\partial \ln W_q(\xi / \mathcal{Z}_{nq})}{\partial (\sigma_q^2)} = 0 \quad (4.2.25)$$

и переходя к непрерывному времени, оценку дисперсии шума $\hat{\sigma}_q^2 = \hat{v}_q^2 / T_u$ можно представить в форме

$$\hat{\sigma}_q^2 = \frac{1}{T_u} \int_0^T [\hat{x}_q(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{nq}^{(N)}(t)]^2 dt. \quad (4.2.26)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{Z}}_{nq}^{(N)}(t) = m_{c\pi q}^{(N)} \mathcal{Z}_{nq}(t) + m_{s\pi q}^{(N)} \tilde{\mathcal{Z}}_{nq}(t) \quad (4.2.27)$$

– оценка узкополосной помехи в q -й ветви, сформированная по обучающей выборке (4.1.2) на интервале измерения $T_u = n\Delta t = NT$; $m_{c\pi q}^{(N)}$ и $m_{s\pi q}^{(N)}$ в общем случае определяются (4.2.6). Нетрудно показать, что оценка (4.2.26) состоятельна, асимптотически нормальна со средним σ_q^2 .

Из (4.2.26) можно получить оценку спектральной плотности шума в q -й ветви

$$\hat{v}_q^2 = \hat{\sigma}_q^2 NT = \int_0^{NT} [\hat{x}_q(t) - \hat{\mathcal{Z}}_{nq}^{(N)}(t)]^2 dt. \quad (4.2.28)$$

Представляет интерес также определение алгоритма разнесенного приема в условиях неразличимых структур сигнала и узкополосных помех в каждой ветви разнесения, т. е. при условии

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{nq}(t) = \mathcal{Z}_r(t), \quad g_{orq}^2 = 1. \quad (4.2.29)$$

Такая ситуация может обуславливаться особенностями воздействующих помех, а в некоторых случаях различие в структурах сигналов и узкополосных помех не используется в целях более простого построения приемника. При этом алгоритм обработки сигналов следует как частный случай из правила (4.2.8), если подставить в него оценку $\hat{\mathcal{Z}}_{nq}(t)$ в форме (4.2.11), а B_{rq} в виде

$$B_{rq} = 1 - \frac{\overline{h_{nq}^2} g_{orq}^2}{1 + h_{nq}^2}. \quad (4.2.30)$$

и учесть условие (4.2.29). После всех преобразований алгоритм будет определяться неравенством

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_{\Sigma q}^2} [\mu_{cq} x_{rq} + \mu_{sq} y_{rq} - \frac{\mu_q^2 E_q}{2}] > \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_{\Sigma q}^2} [\mu_{cq} x_{lq} + \mu_{sq} y_{lq} - \frac{\mu_q^2 E_q}{2}], \quad r \neq l, \quad (4.2.31)$$

в котором введены обозначения

$$x_{rq} = \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{Z}'_q(t) \tilde{Z}_r(t) dt, \quad y_{rq} = \int_{LT}^{(L+1)T} \tilde{Z}'_q(t) \tilde{Z}_r(t) dt; \quad (4.2.32)$$

$$V_{\Sigma q}^2 = v_q^2 (1 + \overline{h_{nq}^2}) = v_q^2 + \overline{\mu_{nq}^2 E_{nq}} \quad (4.2.33)$$

– суммарная спектральная плотность мощности смеси помех с шумом в q -й ветви разнесения. В тех ветвях, где отсутствуют узкополосные помехи, $V_{\Sigma q}^2 = v_q^2$.

При неизвестных $V_{\Sigma q}^2$ в ветвях можно использовать оценки спектральной плотности в виде

$$\hat{V}_{\Sigma q}^2 = \int_0^{NT} \tilde{x}_q^2(t) dt. \quad (4.2.34)$$

Оценка (4.2.34) состоятельна, асимптотически нормальна со средним $V_{\Sigma q}^2$.

Из (4.2.31) нетрудно видеть, что высокая достоверность приема обеспечивается ветвями с малой энергией узкополосных помех. Для этого необходимо применять такие виды разнесения сигналов, которые обеспечивают большую декорреляцию узкополосных помех в ветвях, например сигналы с частотным или частотно-временным разнесением. Заметим, что здесь не затрагиваются вопросы пространственной компенсации помех.

При отсутствии узкополосных помех ($\overline{h_{nq}^2} = 0$), алгоритм (4.2.31) совпадает с оптимальным решающим правилом когерентного разнесенного приема для каналов с белым шумом.

Некогерентный разнесенный прием с когерентным сложением сигналов. Найдем алгоритм некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением ортогональных в усиленном смысле сигналов. Правило решения о приеме r -го варианта сигнала по критерию Котельникова при априорно равновероятных передаваемых сигналах определяется неравенством

$$\ln \Lambda_{r,l} > 0, \quad r \neq l. \quad (4.2.35)$$

Будем полагать, что начальная фаза сигналов во всех ветвях разнесения одинакова и известна с точностью до Ψ , где Ψ распределено равномерно на интервале $[0, 2\pi]$, тогда отношение правдоподобия равно

$$\Lambda_{r|l} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\prod_{q=1}^Q \int_{G(\mu_n)} W_q(\mu_{\Pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q / \mathbf{Z}_r, \Psi, \mu_{\Pi}) d\mu_{\Pi} \right] d\Psi}{\int_0^{2\pi} \left[\prod_{q=1}^Q \int_{G(\mu_n)} W_q(\mu_{\Pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q / \mathbf{Z}_l, \Psi, \mu_{\Pi}) d\mu_{\Pi} \right] d\Psi}. \quad (4.2.36)$$

Здесь $\mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q / \mathbf{Z}_r, \Psi, \mu_{\Pi})$ определено (4.2.3) с учетом эквивалентной замены

$$\mu_{cq} = \mu_q \cos \Psi, \quad \mu_{sq} = \mu_q \sin \Psi, \quad (4.2.37)$$

где $\mu_q = \sqrt{\mu_{cq}^2 + \mu_{sq}^2}$.

После интегрирования в (4.2.36) по μ_{Π} , затем по Ψ , в соответствии с (4.2.35) получим искомый алгоритм:

$$\ln I_0(\mathbf{V}_r) - \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2 B_{rq}}{2} > \ln I_0(\mathbf{V}_l) - \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2 B_{lq}}{2}, \quad r \neq l, \quad (4.2.38)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;

$$\mathbf{V}_r = |\mathbf{V}_r| = \left[\left(\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_q^2} X_{rq} \right)^2 + \left(\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_q^2} Y_{rq} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (4.2.39)$$

X_{rq} и Y_{rq} определены (4.2.15).

Правило решения (4.2.38) реализуется схемой, состоящей из Q отдельных схем некогерентного одиночного приема на перемножителях или согласованных фильтрах и сумматоров, складывающих результаты, полученные в каждой ветви. Как и в случае когерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам алгоритм (4.2.38) отличается от алгоритма, оптимального для каналов с белым шумом, наличием дополнительных устройств формирования оценки узкополосных помех с помощью обучающей выборки помех в каждой ветви и устройств формирования пороговых уровней, зависящих от коэффициентов, характеризующих различие сигнала и узкополосных помех. Эти устройства могут быть построены аналогично приведенным на рис. 2.8.3, 2.8.4.

Если распределение начальной фазы Ψ неизвестно, то отношение правдоподобия определяется максимизацией по Ψ :

$$\Lambda_{r,l} = \frac{\max_{\Psi} \prod_{q=1}^Q \int_{G(\mu_{\pi})} W_q(\mu_{\pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(Z'_q / Z_r, \Psi, \mu_{\pi}) d\mu_{\pi}}{\max_{\Psi} \prod_{q=1}^Q \int_{G(\mu_{\pi})} W_q(\mu_{\pi} / \mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(Z'_q / Z_l, \Psi, \mu_{\pi}) d\mu_{\pi}}. \quad (4.2.40)$$

При этом максимально правдоподобная оценка Ψ равна

$$\hat{\Psi} = \arctg \left(\frac{\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{V_q^2} Y_{rq}}{\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{V_q^2} X_{rq}} \right), \quad (4.2.41)$$

а решающее правило принимает вид:

$$V_r - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q h_q^2 B_{rq} > V_l - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q h_q^2 B_{lq}, \quad r \neq l. \quad (4.2.42)$$

Это правило отличается от (4.2.38) тем, что вместо нелинейного элемента с характеристикой $\ln I_0(V_r)$ должен включаться линейный детектор.

При условии (4.2.21) из (4.2.38) и (4.2.42) следует алгоритм приема

$$V_r > V_l, \quad r \neq l. \quad (4.2.43)$$

При действии стохастических узкополосных помех структура алгоритма некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов по форме совпадает с (4.2.38) или (4.2.43), однако формирование оценок ведется путем моделирования дифференциальных уравнений (2.9.39)–(2.9.41) с помощью аналоговых или цифровых вычислителей, кроме того, учитывается влияние на сигнал фильтра оценки узкополосной помехи, как показано в параграфе 2.9.

Если неизвестны спектральные плотности мощности шума в ветвях разнесения, то можно использовать оценки вида (4.2.28).

В условиях неразличимых структур сигнала и узкополосных помех или если эти различия не используются в целях более простого построения приемника алгоритм некогерентного приема с когерентным сложением разнесенных сигналов можно вывести как частный случай из правила (4.2.42) при подста-

новке в него оценки в форме (4.2.11) и B_{rq} в форме (4.2.30) с учетом (4.2.29). В результате алгоритм будет определяться неравенством:

$$v_r - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q H_{rq}^2 > v_l - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q H_{lq}^2, \quad r \neq l, \quad (4.2.44)$$

где

$$v_r = \left[\left(\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_{\Sigma q}^2} x_{rq} \right)^2 + \left(\sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_{\Sigma q}^2} y_{rq} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (4.2.45)$$

$$H_{rq}^2 = \frac{\mu_q^2 E_{rq}}{v_{\Sigma q}^2} = \frac{h_{rq}^2}{1 + h_{\Pi q}^2} \quad (4.2.46)$$

– отношение энергии принятого сигнала к суммарной спектральной плотности мощности совокупности помех и шума в q -й ветви;

$h_{rq}^2 = \mu_q^2 E_{rq} / v_q^2$, x_{rq} и y_{rq} определяются (4.2.32).

При условии

$$h_{rq}^2 = h_q^2 = \text{const}(r), \quad \overline{h_{\Pi q}^2} = \text{const}(r) \quad (4.2.47)$$

алгоритм (4.2.44) приобретает вид:

$$v_r > v_l, \quad r \neq l. \quad (4.2.48)$$

Когда $v_{\Sigma q}^2$ неизвестны, можно использовать оценки (4.2.34). При отсутствии узкополосных помех ($\overline{h_{\Pi q}^2} = 0$) алгоритм (4.2.44) совпадает с оптимальным решающим правилом некогерентного приема с когерентным сложением разнесенных сигналов в каналах с белым шумом.

Для двоичных сигналов с пассивной паузой алгоритмы могут быть получены из (4.2.38), (4.2.42), (4.2.44) путем приравнивания нулю правых частей неравенств. Например, из (4.2.42) решение о наличии сигнала принимается при условии

$$V_l > \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2 B_{lq}}{2}. \quad (4.2.49)$$

Решение об отсутствии сигнала принимается при обратном знаке этого неравенства.

Некогерентный разнесенный прием. В условиях замираний сигналов решающее правило находится из (4.2.1), (4.2.2) после усреднения по μ_{II} и μ . Рассмотрим независимые релейские замирания сигналов в ветвях разнесения, при этом μ_{cq} и μ_{sq} распределены по нормальному закону (2.2.40). После интегрирования в (4.2.2) алгоритм некогерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам определится неравенством:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{\overline{h_q^2}(X_{rq}^2 + Y_{rq}^2)}{v_q^2 E_q (1 + \overline{h_q^2} B_{rq})} - \sum_{q=1}^Q \frac{\overline{h_q^2}(X_{lq}^2 + Y_{lq}^2)}{v_q^2 E_q (1 + \overline{h_q^2} B_{lq})} > \sum_{q=1}^Q \ln \frac{1 + \overline{h_q^2} B_{rq}}{1 + \overline{h_q^2} B_{lq}}, \quad (4.2.50)$$

где $\overline{h_q^2} = \overline{\mu_q^2 E_q} / v_q^2$ – среднестатистическое значение отношения энергии принятого сигнала к спектральной плотности мощности шума в q -й ветви разнесения; X_{rq} и Y_{rq} определяются (4.2.15).

Тракт обработки r -го сигнала в каждой ветви разнесения может быть таким же, как при одиночном приеме, например, как в схеме на рис. 2.8.13. Здесь после вычитания из принятой смеси оценки помехи, сформированной с помощью обучающей выборки в блоке оценки, производится обычная корреляционная обработка сигнала, далее возведение в квадрат, сложение возведенных в квадрат напряжений с квадратурных трактов, умножение на весовой коэффициент и вычитание порогового уровня. После этого выходные напряжения трактов всех Q ветвей суммируются и поступают на схему сравнения, где принимается решение о переданном сигнале.

В двоичных системах с пассивной паузой алгоритм (4.2.50) принимает вид

$$\sum_{q=1}^Q \frac{\overline{h_q^2}(X_{lq}^2 + Y_{lq}^2)}{v_q^2 E_q (1 + \overline{h_q^2} B_{lq})} > \sum_{q=1}^Q \ln(1 + \overline{h_q^2} B_{lq}). \quad (4.2.51)$$

В условиях действия стохастических узкополосных помех структура алгоритмов некогерентного разнесенного приема остается такой же, но следует учитывать особенности формирования оценок с помощью аналоговых или цифровых вычислителей, моделирующих дифференциальные уравнения (2.9.39)–(2.9.41), и влияние на сигнал фильтра оценки узкополосной помехи.

В каналах с неразличимыми структурами сигнала и узкополосных помех алгоритм некогерентного разнесенного приема из (4.2.50) с учетом (4.2.11), (4.2.30), (4.2.29) приобретает вид:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{\overline{H_{rq}^2} v_{rq}^2}{v_{\Sigma q}^2 E_q (1 + \overline{H_{rq}^2})} - \sum_{q=1}^Q \frac{\overline{H_{lq}^2} v_{lq}^2}{v_{\Sigma q}^2 E_q (1 + \overline{H_{lq}^2})} > \sum_{q=1}^Q \ln \frac{1 + \overline{H_{rq}^2}}{1 + \overline{H_{lq}^2}}, \quad (4.2.52)$$

где

$$\overline{H_{rq}^2} = \frac{\overline{\mu_q^2 E_q}}{v_{\Sigma q}^2} = \frac{\overline{h_q^2}}{1 + \overline{h_{\Pi q}^2}} \quad (4.2.53)$$

– среднестатистическое значение отношения энергии принятого сигнала к суммарной спектральной плотности мощности помех и шума в q -й ветви; $\overline{h_q^2} = \overline{\mu_q^2 E_q} / v_q^2$; $\overline{v_{rq}^2} = x_{rq}^2 + y_{rq}^2$, x_{rq} и y_{rq} определены (4.2.32).

При условии $\overline{H_{rq}^2} = H_q^2 = \text{const}(r)$, т. е. при $\overline{h_q^2} = \text{const}(r)$ и $\overline{h_{\Pi q}^2} = \text{const}(r)$, алгоритм (4.2.52) можно записать в такой форме:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{\overline{H_q^2 v_{rq}^2}}{v_{\Sigma q}^2 (1 + \overline{H_q^2})} > \sum_{q=1}^Q \frac{\overline{H_q^2 v_{lq}^2}}{v_{\Sigma q}^2 E_q (1 + \overline{H_q^2})}, \quad r \neq l \quad (4.2.54)$$

или с учетом обозначения (4.2.53)

$$\sum_{q=1}^Q \frac{\overline{\mu_q^2 v_{rq}^2}}{v_{\Sigma q}^2 v_{q(c+\Pi)}^2} > \sum_{q=1}^Q \frac{\overline{\mu_q^2 v_{lq}^2}}{v_{\Sigma q}^2 v_{q(c+\Pi)}^2}, \quad r \neq l, \quad (4.2.55)$$

где

$$v_{q(c+\Pi)}^2 = v_q^2 + \overline{\mu_q^2 E_q} + \overline{\mu_{\Pi q}^2 E_{\Pi q}} = v_{\Sigma q}^2 + \overline{\mu_q^2 E_q} \quad (4.2.56)$$

– суммарная энергия принятой смеси сигнала, узкополосной помехи и шума. В отличие от $v_{\Sigma q}^2$, оценка которой (4.2.34) находится при отсутствии полезного сигнала, $v_{q(c+\Pi)}^2$ оценивается по всей принятой реализации в q -й ветви

$$\hat{v}_{q(c+\Pi)}^2 = \int_{T_u} [\hat{Z}'_q(t)]^2 dt. \quad (4.2.57)$$

При отсутствии узкополосных помех ($\overline{h_{\Pi q}^2} = 0$) алгоритм (4.2.52) совпадает с известным алгоритмом некогерентного разнесенного приема в каналах с белым шумом [198].

Рассуждая аналогично приведенному в параграфе 2.3, можно показать состоятельность и асимптотическую оптимальность полученных алгоритмов.

4.3. Помехоустойчивость когерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам

Прием незамирающих сигналов. Проанализируем помехоустойчивость приема двоичных сигналов с активной паузой с одинаковыми энергиями и с пассивной паузой. Вероятность ошибки найдем по формуле

$$p = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^A W(\mathfrak{a}^{(1)}) d\mathfrak{a}^{(1)} + \int_A^{\infty} W(\mathfrak{a}^{(2)}) d\mathfrak{a}^{(2)} \right], \quad (4.3.1)$$

где в соответствии с алгоритмом (4.2.8)

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^{(r)} = & \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_{cq}}{v_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\dot{Z}'_q(t) - \hat{Z}_{\Pi q}(t)] [Z_1(t) - Z_2(t)] dt + \\ & + \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_{sq}}{v_q^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\dot{Z}'_q(t) - \hat{Z}_{\Pi q}(t)] [\tilde{Z}_1(t) - \tilde{Z}_2(t)] dt; \quad r = 1, 2; \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$A = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2} (B_{1q} - B_{2q}). \quad (4.3.3)$$

Здесь h_q^2 – отношение энергии принятого сигнала к спектральной плотности мощности шума в q -й ветви; $\hat{Z}_{\Pi q}(t)$ и $B_{r q}$ определяются формулами (4.2.9), (4.2.13).

Подставим в (4.3.2) оценку помехи $\hat{Z}_{\Pi q}(t)$ в форме

$$\hat{Z}_{\Pi q}(t) = m_{сп q}^{(\ominus)} Z_{\Pi q}(t) + m_{s\Pi q}^{(\ominus)} \tilde{Z}_{\Pi q}(t), \quad (4.3.4)$$

где

$$m_{сп q}^{(\ominus)} = a_q \hat{\mu}_{сп q}^{(L)} + b_q m_{сп q}^{(N)}, \quad m_{s\Pi q}^{(\ominus)} = a_q \hat{\mu}_{s\Pi q}^{(L)} + b_q m_{s\Pi q}^{(N)}. \quad (4.3.5)$$

Поскольку при произвольных размерах обучающей выборки N и произвольных изменениях параметров помех анализ помехоустойчивости очень громоздок, то для выяснения закономерностей поведения системы, рассмотрим вначале случай, когда $\hat{\mu}_{сп q}^{(L)}$ и $\hat{\mu}_{s\Pi q}^{(L)}$ формируются на интервале решения по неклассифицированной реализации входной смеси, а $m_{сп q}^{(N)}$ и $m_{s\Pi q}^{(N)}$ по классифицированной на предшествующем интервале. При этом, с учетом (4.2.6), (4.2.7)

$$\hat{\mu}_{c\pi q}^{(L)} = \hat{\mu}_{c\pi q}^{(N+1)} = \frac{1}{E_{\pi q}} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'_q(t) \mathcal{Z}_{\pi q}(t) dt,$$

$$\hat{\mu}_{s\pi q}^{(L)} = \hat{\mu}_{s\pi q}^{(N+1)} = \frac{1}{E_{\pi q}} \int_{LT}^{(L+1)T} \mathcal{Z}'_q(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\pi q}(t) dt; \quad (4.3.6)$$

$$m_{c\pi q}^{(N)} = \frac{1}{E_{\pi q}} \int_{(L-1)T}^{LT} \mathcal{X}_q(t) \mathcal{Z}_{\pi q}(t) dt, \quad m_{s\pi q}^{(N)} = \frac{1}{E_{\pi q}} \int_{(L-1)T}^{LT} \mathcal{X}_q(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{\pi q}(t) dt; \quad (4.3.7)$$

$$a_q = \frac{R_{\pi q}^2 + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2)}{1 + R_{\pi q}^2 + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2)}, \quad b_q = \frac{R_{\pi q}^2}{1 + R_{\pi q}^2 + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2)}. \quad (4.3.8)$$

При сделанных допущениях относительно характера шумов и узкополосных помех в ветвях разнесения $\mathfrak{a}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) являются нормальными случайными величинами со средними значениями

$$\bar{\mathfrak{a}}^{(1)} = \sum_{q=1}^Q h_q^2 [1 - \rho - a_q (g_{01q}^2 - g_{12}^{(q)})], \quad (4.3.9)$$

$$\bar{\mathfrak{a}}^{(2)} = - \sum_{q=1}^Q h_q^2 [1 - \rho - a_q (g_{02q}^2 - g_{12}^{(q)})]$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 [1 - \rho + \frac{1}{2} \varepsilon_q g_q^2]. \quad (4.3.10)$$

Здесь

$$\varepsilon_q = - \frac{R_{\pi q}^2 (1 + R_{\pi q}^2) + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2) [1 + 2R_{\pi q}^2 + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2)]}{[1 + R_{\pi q}^2 + \overline{h_{\pi q}^2} (1 - R_{\pi q}^2)]^2}, \quad (4.3.11)$$

g_q^2 и $g_{12}^{(q)}$ определяются формулами (2.4.15) и (2.4.16) при замене в них индекса i на q .

Таким образом, вероятность ошибки определится выражением

$$p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(h_{\mathfrak{D}})], \quad (4.3.12)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция Крампа;

$$h_{\mathfrak{D}} = \frac{\sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - \rho - \frac{1}{2} a_q g_q^2)}{\left[\sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - \rho + \frac{1}{2} \varepsilon_q g_q^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3.13)$$

– для сигналов с активной паузой;

$$h_{\mathfrak{D}} = \frac{\sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - a_q g_{01q}^2)}{\left[2 \sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 + \varepsilon_q g_{01q}^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3.14)$$

– для сигналов с пассивной паузой.

Из этих выражений видно, что в общем случае вероятность ошибки зависит от величины отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума (h_q^2), коэффициентов различимости сигнала и узкополосных помех (g_q^2) от отношения энергии помех к спектральной плотности шума ($h_{\Pi q}^2$) и от скорости изменения параметров помех ($R_{\Pi q}$). Причем в зависимости от мощности помех ($h_{\Pi q}^2$) и скорости изменения их параметров ($R_{\Pi q}$) роль оценок на предшествующих интервалах времени уменьшается.

Из (4.3.13) с учетом (4.3.8), (4.3.11) следуют частные случаи:

1. $R_{\Pi q} \ll 1$, что соответствует быстрым изменениям параметров узкополосных помех. При этом (4.3.13) преобразуется к виду

$$h_{\mathfrak{D}}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{\overline{h_{\Pi q}^2} g_q^2}{2(1 + \overline{h_{\Pi q}^2})} \right), \quad (4.3.15)$$

или при $\overline{h_{\Pi q}^2} \gg 1$

$$h_{\Sigma}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{g_q^2}{2} \right). \quad (4.3.16)$$

Здесь высокая достоверность приема достигается вследствие избыточности по сигналу, даже если все ветви разнесения поражены узкополосными помехами.

2. $R_{\Pi q} = 1$, что соответствует каналу с неизменными параметрами узкополосных помех. При этом из (4.3.13) следует

$$h_{\Sigma}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{g_q^2}{4} \right). \quad (4.3.17)$$

В условиях, когда $R_{\Pi q} = 1$, представляется возможным вывести более общее выражение чем (4.3.17), т. е. для любых размеров обучающей выборки:

$$h_{\Sigma}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{g_q^2}{2(1+N)} \right). \quad (4.3.18)$$

Формула (4.3.17) является частным случаем (4.3.18) при $N = 1$.

Как видим при $N \gg 1$ избыточность по сигналу в принципе не требуется и по мере увеличения N помехоустойчивость приближается к потенциальной, обусловленной белым шумом. В частности, при $N=2-3$ энергетический проигрыш из-за воздействия узкополосных помех не превышает 1,8-1,2 дБ (при $Q=1$).

Представляет интерес также определение вероятности ошибки при конечной скорости изменения параметров узкополосных помех, когда приемник построен оптимально для условий неизменных параметров помех. При этом вероятность ошибки определяется формулой (4.3.12) с учетом (4.3.13) и (4.3.14), если подставить в них

$$a_q = \frac{1}{N+1}, \quad \varepsilon_q = \frac{N^2}{(N+1)^2} r_{\Pi q} \overline{h_{\Pi q}^2} - \frac{1}{N+1}. \quad (4.3.19)$$

Получим

$$h_{\Sigma} = \frac{\sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{g_q^2}{2(N+1)} \right)}{\sqrt{2 \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho + \frac{g_q^2}{2(N+1)} \left(\frac{N^2}{N+1} r_{\Pi q} \overline{h_{\Pi q}^2} - 1 \right) \right)}} \quad (4.3.20)$$

– для сигналов с активной паузой;

$$h_{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \frac{g_{01q}^2}{N+1} \right)}{\sqrt{2 \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 + \frac{g_{01q}^2}{N+1} \left(\frac{N^2}{N+1} r_{\Pi q} \bar{h}_{\Pi q}^2 - 1 \right) \right)}} \quad (4.3.21)$$

– для сигналов с пассивной паузой. Здесь $r_{\Pi q}$ определяется (2.4.17) при замене индекса i на q .

Нетрудно видеть, что при $N=0$ выражение (4.3.20) совпадает с (4.3.16), а при $r_{\Pi q} = 0$ – с (4.3.18). Несмотря на совпадение граничных формул между рассмотренными режимами существует принципиальное различие. В первом случае размер выборки автоматически меняется в зависимости от $\bar{h}_{\Pi q}^2$ и $R_{\Pi q}$, поэтому нет декорреляции между параметрами помех на интервале измерения и использования измеренных значений, что могло бы привести к увеличению вероятности ошибки. Во втором случае размер обучающей выборки фиксирован и должен выбираться из компромиссных соображений, чтобы не слишком увеличивалась вероятность ошибки из-за декорреляции параметров. Ограниченным должен быть и интервал использования измеренных значений параметров помех в каналах с изменяющимися параметрами.

Далее рассмотрим помехоустойчивость приема при воздействии стохастических узкополосных помех. В этом случае вероятность ошибки определяется выражением (4.3.12), в котором

$$h_{\mathcal{E}}^2 = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2} \left\{ \int_{T_0}^{T_{\alpha}} |\underline{Z}_{1q}^{(\mathcal{E})}(t)|^2 dt - \operatorname{Re} \left[\int_{T_0}^{T_{\alpha}} \underline{Z}_{1q}^{(\mathcal{E})}(t) \underline{Z}_{2q}^{*(\mathcal{E})}(t) dt \right] \right\}, \quad (4.3.22)$$

где $\underline{Z}_{rq}^{(\mathcal{E})}(t) = \underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_{rq}^{\Pi}(t)$, ($r=1,2$); $\underline{Z}_{rq}^{\Pi}(t)$ – сигнальная функция $\underline{Z}_r(t)$ на выходе фильтра оценки узкополосной помехи в q -й ветви.

В частном случае разложимого ядра корреляционной функции помех имеем

$$h_{\mathcal{E}}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \frac{\overline{h_{\Pi qi}^2} g_{qi}^2}{1 + \overline{h_{\Pi qi}^2}} \right), \quad (4.3.23)$$

откуда следует (4.3.15) при $K=1$.

Анализ показывает, что подавление узкополосных помех зависит от соотношения полос сигнала и воздействующих помех и их взаимного перекрытия. В ветвях, где действуют достаточно мощные помехи, имеющие интервал корреляции, соизмеримый с длительностью элемента сигнала, остаточная ошибка

фильтрации столь велика, что такие ветви лучше попросту отключать, чтобы они не участвовали в формировании результирующего сигнала или участвовали с существенно меньшим весом. К такому же выводу приходим при рассмотрении помех с неразличимыми по сравнению с сигналами структурами. Действительно, из анализа алгоритма (4.2.31) следует вероятность ошибки

$$p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(\gamma h_{\Sigma})], \quad (4.3.24)$$

где γ^2 определяется (2.4.24); а h_{Σ}^2 (при $\overline{h_{\Pi q}^2} = \overline{h_{\Pi q 2}^2}$) равно

$$h_{\Sigma}^2 = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{1 + \overline{h_{\Pi q}^2}}. \quad (4.3.25)$$

Отсюда видно, что высокая достоверность приема обеспечивается ветвями разнесения с малой интенсивностью узкополосных помех. Ветви с $\overline{h_{\Pi q}^2} \gg 1$ отключаются, тогда в (4.3.25) под Q подразумеваются работающие ветви разнесения, оставшиеся после выключения части пораженных узкополосными помехами. Заметим, что (4.3.25) можно получить непосредственно из (4.3.15) при $g_{0r q}^2 = 1$ ($r = 1, 2$) и $g_{12}^{(q)} = 0$.

Прием замирающих сигналов. Вероятность ошибки в условиях замираний сигналов можно найти усреднением полученных выше выражений в соответствии с распределением h_q^2 . Найдем вероятность ошибки при релейских замираниях сигналов. Если замирания в ветвях разнесения полностью коррелированы, то, учитывая, что $\overline{h_q^2} = \text{const}(q)$, получим

$$p = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\overline{h_{\Sigma}^2}}{\overline{h_{\Sigma}^2} + 2}} \right] \approx \frac{1}{2\overline{h_{\Sigma}^2}}, \quad (4.3.26)$$

где $\overline{h_{\Sigma}^2}$ определяется формулами (4.3.13)–(4.3.23), в которых h_q^2 заменяются среднестатистическими значениями $\overline{h_q^2}$.

При независимых релейских замираниях сигналов в ветвях разнесения достаточно простое выражение для вероятности ошибки получается в статистически однородных каналах, т. е. при $\overline{h_q^2} = \text{const}(q)$

$$\begin{aligned} g_q^2 = g^2 = \text{const}(q), \quad \overline{h_{\Pi q}^2} = \overline{h_{\Pi}^2} = \text{const}(q), \quad R_{\Pi q} = R_{\Pi} = \text{const}(q), \\ r_{\Pi q} = r_{\Pi} = \text{const}(q), \quad a_q = a = \text{const}(q), \quad \varepsilon_q = \varepsilon = \text{const}(q). \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Произведя необходимые усреднения, вероятность ошибки будет определяться соотношениями [144, п. 4.4]:

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\gamma^2 \overline{h_{\Sigma Q}^2}}{\gamma^2 \overline{h_{\Sigma Q}^2} + 2}} \left[1 + \sum_{k=1}^Q \frac{(2k-1)!!}{k!(2 + \gamma^2 \overline{h_{\Sigma Q}^2})^k} \right] \right\}, \quad (4.3.28)$$

или

$$p = \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q (\gamma^2 \overline{h_{\Sigma Q}^2} + 2)^Q} {}_2F_1 \left(Q; \frac{1}{2}; 1 + Q; \frac{2}{2 + \gamma^2 \overline{h_{\Sigma Q}^2}} \right). \quad (4.3.29)$$

Здесь ${}_2F_1(a, b, c, x)$ – гипергеометрическая функция; γ^2 – определяется (2.4.24); $\overline{h_{\Sigma Q}^2}$ определяется следующими выражениями:

1. Приемник построен оптимально при марковских изменениях параметров узкополосных помех с обучением по помехе на интервале решения и на предшествующем интервале, тогда

$$\overline{h_{\Sigma Q}^2} = \overline{h_Q^2} \frac{(1 - a g_{01}^2)^2}{1 + \varepsilon g_{01}^2} \quad (4.3.30)$$

– для противоположных сигналов и с пассивной паузой;

$$\overline{h_{\Sigma Q}^2} = \overline{h_Q^2} \frac{[1 - 0,5a(g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12})]^2}{1 + 0,5\varepsilon(g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12})} \quad (4.3.31)$$

– для ортогональных сигналов. Здесь a и ε определяются формулами (4.3.8) и (4.3.11); $\overline{h_Q^2} = \overline{h^2} / Q^s$, где $0 \leq s \leq 2$, $\overline{h^2}$ – среднестатистическое значение h^2 .

Из (4.3.30), (4.3.31) с учетом (4.3.8), (4.3.11) видно, что в зависимости от интенсивности узкополосных помех ($\overline{h_{II}^2}$) и скорости изменения их параметров (R_{II}) меняется роль оценок, сформированных на предшествующих интервалах времени, и влияние их на помехоустойчивость приема. При быстрых изменениях параметров ($R_{II} \ll 1$), независимых на соседних интервалах времени, имеем

$$\overline{h_{\Sigma Q}^2} = \overline{h_Q^2} \left(1 - \frac{\overline{h_n^2} g_{01}^2}{1 + \overline{h_n^2}} \right) \quad (4.3.32)$$

– для противоположных сигналов и с пассивной паузой;

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \left[1 - \frac{\overline{h_n^2}(g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12})}{2(1 + \overline{h_n^2})} \right] \quad (4.3.33)$$

– для ортогональных сигналов. Из-за избыточности по сигналу в каждой ветви разнесения, даже при поражении всех ветвей мощными помехами ($\overline{h_n^2} \gg 1$), обеспечивается высокая достоверность приема.

В другом крайнем случае, когда неизменны параметры помех ($R_{II} = 1$), в принципе избыточность не требуется и возможно полное подавление узкополосных помех. При этом

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \left(1 - \frac{g_{01}^2}{1 + N} \right) \quad (4.3.34)$$

– для противоположных сигналов и с пассивной паузой;

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \left[1 - \frac{g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12}}{2(1 + N)} \right] \quad (4.3.35)$$

– для ортогональных сигналов.

2. Приемник построен оптимально для условий неизменных параметров узкополосных помех, но работает при изменяющихся параметрах

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \frac{\left(1 - \frac{g_{01}^2}{1 + N} \right)^2}{1 + \frac{g_{01}^2}{1 + N} \left(\frac{N^2}{1 + N} r_{II} \overline{h_n^2} - 1 \right)} \quad (4.3.36)$$

– для противоположных сигналов и с пассивной паузой;

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \frac{\left(1 - \frac{g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12}}{2(1 + N)} \right)^2}{1 + \frac{g_{01}^2 + g_{02}^2 - 2g_{12}}{2(1 + N)} \left(\frac{N^2}{1 + N} r_{II} \overline{h_n^2} - 1 \right)} \quad (4.3.37)$$

– для ортогональных сигналов. Граничные формулы, следующие из (4.3.36), (4.3.37) при $N=0$ и $r_{II} = 0$, совпадают с (4.3.32), (4.3.33) и (4.3.34), (4.3.35). Однако в общем случае, как было отмечено ранее при рассмотрении незаммирующих сигналов, между указанными режимами имеется принципиальное раз-

личие, заключающееся в автоматическом изменении веса предшествующих оценок в зависимости от интенсивности и скорости изменения параметров помех.

В условиях высокой достоверности приема, когда $\overline{h_Q^2} \gg 1$, вместо (4.3.28), (4.3.29) можно использовать приближенное соотношение:

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q (\overline{h_{3Q}^2})^Q}. \quad (4.3.38)$$

В частности, при двоекном приеме

$$p \approx \frac{3}{4(\overline{h_{3Q}^2})^2}. \quad (4.3.39)$$

При двоекном приеме нетрудно получить выражение для вероятности ошибки при произвольно коррелированных релейских замираниях сигналов в ветвях разнесения [198]. При $\overline{h_Q^2}(1 - R_\mu^2) \gg 1$ имеет место соотношение:

$$p \approx 3/4(\overline{h_{3Q}^2})^2(1 - R_\mu^2), \quad (4.3.40)$$

где $R_\mu = \sqrt{R_{c\mu}^2 + \tilde{R}_{s\mu}^2}$ коэффициент взаимной корреляции замираний принятых сигналов различных ветвей разнесения.

Сравнивая (4.3.40) и (4.3.39), видим, что наличие корреляции замираний сигналов в ветвях разнесения ухудшает помехоустойчивость приема. Однако при $R_\mu \leq 0,6$ энергетический проигрыш из-за корреляции не превышает 1 дБ, поэтому практически не влияет на эффективность разнесенного приема.

В качестве иллюстрации на рис. 4.3.1 приведены зависимости вероятности ошибки p от величины $\overline{h^2}$ для одиночного приема (кривые 11–15) и двоекного приема (кривые 6–10) замирающих сигналов, а также одиночного приема незамирающих сигналов (кривые 1–5), построенные для случая: $\rho = 0$ (ортогональные сигналы); $g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0,5$; $g_{12} = 0$; $\overline{h_{\Pi}^2} = 100$; $\overline{h_q^2} = \overline{h^2}$. Кривые 2, 3, 4 рассчитаны по формуле (4.3.12) с учетом (4.3.13), (4.3.11), (4.3.8) соответственно при $T/\tau_0 = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ (т. е. при $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10^{-1}, 1, 10$). Кривые 7, 8, 9 и 12, 13, 14 рассчитаны по формуле (4.3.38) с учетом (4.3.31), (4.3.11), (4.3.8) при $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10^{-1}, 1, 10$. Здесь же для сравнения приведены кривые 1, 6, 11 для каналов только с флуктуационным шумом ($\overline{h_{\Pi}^2} = 0$). Расчет

показывает, что в рассматриваемых условиях энергетический проигрыш от воздействия узкополосных помех в адаптивном приемнике по сравнению с каналом только с флуктуационным шумом составляет $\sim 1,5\text{--}3$ дБ. Проигрыш 3 дБ наблюдается при формировании оценок узкополосных помех на интервале решения (при $g_{01}^2 = g_{02}^2 = 0,5$). Он не зависит от интенсивности узкополосных помех и скорости изменения их параметров. Использование предшествующего интервала времени для формирования оценок помех при $\overline{h_n^2} T / \tau_0 = 0,1$ уменьшает проигрыш на 1,5 дБ. При $\overline{h_n^2} T / \tau_0 = 1$ использование предшествующего интервала уменьшает энергетический проигрыш не значительно (на 0,6 дБ), поэтому не оправдано. Если приемник построен оптимально для каналов с неизменными параметрами узкополосных помех, а работает при изменяющихся параметрах, то при $\overline{h_n^2} T / \tau_0 = 0,1$ и 1 различие в помехоустойчивости по сравнению с предыдущим случаем незначительное.

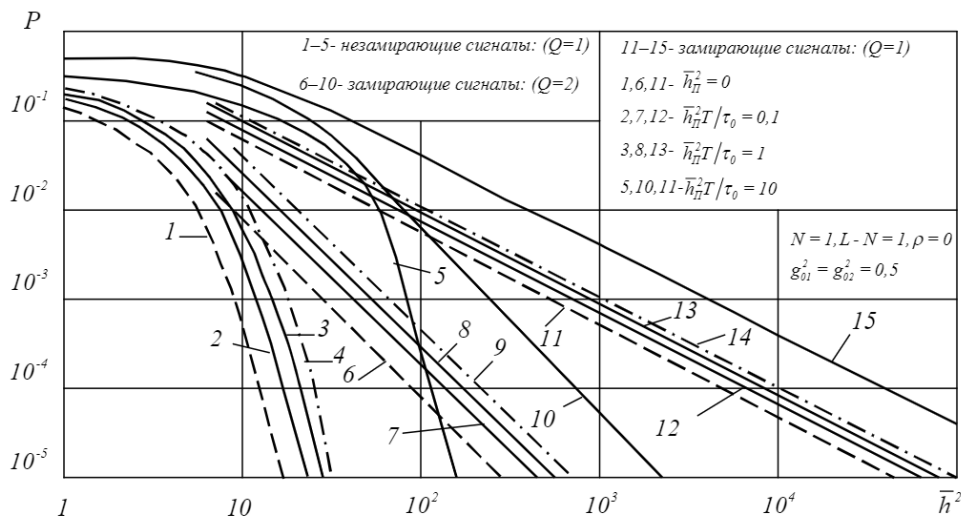


Рис. 4.3.1. Зависимость $p = f(\overline{h^2})$ при когерентном разнесенном приеме

Зависимости p от $\overline{h^2}$ при этом практически совпадают с кривыми 2, 4, 7, 9, 12, 14. Однако при $\overline{h_n^2} T / \tau_0 = 10$ проигрыш неоптимального приемника (кривые 5, 10, 15) существенный (~ 10 дБ), что указывает на нецелесообразность использования неоптимальных оценок помех.

Энергетический выигрыш при переходе от одинарного к двоянному приему, как и в каналах с флуктуационным шумом составляет приблизительно

17 дБ (при $s=0$) при вероятности ошибки $p \approx 10^{-4}$. Переход к строенному приему увеличивает выигрыш еще на 6,5 дБ и обеспечивает достоверность, близкую к достоверности одиночного приема незамирающих сигналов. Разнесенный прием обеспечивает выигрыш по сравнению с одинарным приемом и при $s=1$ и даже $s=2$. Например, для $s=1$ энергетический выигрыш при двоекном приеме составляет ~ 14 дБ, а при $s=2$ ~ 11 дБ.

В условиях воздействия стохастических узкополосных помех вероятность ошибки определяется формулами (4.3.28), (4.3.29), (4.3.38), в которых

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \frac{\overline{h_Q^2}}{2} \left\{ \int_{T_0}^{T_a} \left| \underline{Z}_{1q}^{(\Xi)}(t) \right|^2 dt - \operatorname{Re} \left[\int_{T_0}^{T_a} \underline{Z}_{1q}^{(\Xi)}(t) \underline{Z}_{2q}^{*(\Xi)}(t) dt \right] \right\}. \quad (4.3.41)$$

В частности, при разложении ядре корреляционной функции помех

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \frac{\overline{h_{ni}^2} \overline{g_i^2}}{1 + \overline{h_{ni}^2}} \right). \quad (4.3.42)$$

Подавление узкополосных помех зависит от степени взаимного перекрытия спектров сигналов и помех и соотношения их полос.

В условиях неразличимых структур сигналов и помех

$$\overline{h_{\Xi Q}^2} = \overline{h_Q^2} / (1 + \overline{h_n^2}). \quad (4.3.43)$$

Как видим, здесь высокая достоверность приема может быть достигнута за счет избыточности по ветвям разнесения, поэтому надо использовать такие виды разнесения сигналов, которые обеспечивают декорреляцию помех в различных ветвях.

Используя (4.3.30)–(4.3.37), (4.3.41)–(4.3.43) можно оценить помехоустойчивость когерентного разнесенного приема сигналов с обобщенными релейскими распределениями замираний в ветвях и при m -распределении [4, 144]. При обобщенных релейских замираниях в условиях высокой верности приема вероятность ошибки определяется выражением:

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \left[\frac{(1+d^2)}{\gamma^2 \overline{h_{\Xi Q}^2}} \right]^Q e^{-Qd^2}, \quad (4.3.44)$$

где $d = \sqrt{\frac{\mu_p^2}{\mu_\phi^2}}$ – отношение регулярной составляющей μ_q к среднестатистическому значению флуктуирующей части μ_q .

Сравнение (4.3.44) с (4.3.38) показывает, что при наличии обобщенных релейских замираний сохраняется свойство подавления узкополосных помех. Кроме того, регулярная составляющая коэффициента передачи канала существенно улучшает помехоустойчивость.

При аппроксимации замираний сигналов многомерным m -распределением вероятность ошибки равна

$$p = \frac{1}{2} \frac{C_{2mQ-1}^{mQ} m^{mQ}}{2^{mQ} (2m + \gamma^2 h_{\Sigma Q}^2)^{mQ}} {}_2F_1 \left(mQ; \frac{1}{2}; mQ + 1; \frac{2m}{2m + \gamma^2 h_{\Sigma Q}^2} \right). \quad (4.3.45)$$

Или при $\gamma^2 h_{\Sigma Q}^2 \gg 2m$

$$p \approx \frac{1}{2} \frac{C_{2mQ-1}^{mQ} m^{mQ}}{2^{mQ} (\gamma^2 h_{\Sigma Q}^2)^{mQ}}. \quad (4.3.46)$$

Для $m=1$ формулы (4.3.45) и (4.3.46) совпадают с (4.3.29) и (4.3.38).

В условиях неизвестной спектральной плотности шума в ветвях разнесения полученные здесь формулы для вероятностей ошибок являются предельными в том смысле, что к ним сходятся значения $p = f(N)$, если оценивать неизвестные ν_q^2 с помощью выражений (4.2.28), (4.2.34). Моделированием на ЭВМ показано, что вероятности ошибок сходятся к предельным значениям с достаточной для практики точностью на интервале NT , где $N \approx 20$.

Таким образом, в зависимости от структуры узкополосных помех высокая достоверность приема может быть получена разными путями. При учете тонкой структуры помех и медленных изменениях параметров возможно почти полное подавление узкополосных помех при минимальной избыточности сигнала. При быстрых изменениях параметров узкополосных помех и учете их тонкой структуры высокая достоверность достигается вследствие избыточности по сигналу в каждой ветви. Тогда можно работать даже при поражении всех ветвей узкополосными помехами. В условиях, когда невозможно использовать различие структур сигналов и помех, приходится довольствоваться «грубой» адаптацией, при этом должна быть избыточность по ветвям. В противном случае надо переходить на другой частотный диапазон.

4.4. Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов

Прием незамирающих сигналов. Анализ помехоустойчивости проведем для случая приема двоичных ортогональных в усиленном смысле сигналов с одинаковыми энергиями по правилу (4.2.43). Вероятность ошибочного решения найдем по формуле

$$p = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}) dV_1^{(1)} dV_2^{(1)} + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(V_1^{(2)}, V_2^{(2)}) dV_1^{(2)} dV_2^{(2)} \right], \quad (4.4.1)$$

в которой

$$V_l^{(r)} = \sqrt{\mathfrak{a}_l^{(r)2} + \eta_l^{(r)2}}; \quad r, l = 1, 2; \quad (4.4.2)$$

$$\mathfrak{a}_l^{(r)} = \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_q^2} X_{lq}^{(r)}, \quad \eta_l^{(r)} = \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{v_q^2} Y_{lq}^{(r)}, \quad (4.4.3)$$

где $X_{lq}^{(r)}$ и $Y_{lq}^{(r)}$ определены (4.2.15).

Проанализируем вначале случай марковских изменений параметров узкополосных помех при формировании оценок на интервале решения и на предшествующем интервале времени. Для этого подставим в (4.2.15) оценки помех в форме (4.3.4) с учетом (4.3.5)–(4.3.8). Рассмотрим сигналы с неперекрывающимися спектрами. При релейевских замираниях узкополосных помех составляющие $\mathfrak{a}_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(r)}$ являются нормальными случайными величинами со средними значениями

$$\bar{\mathfrak{a}}_r^{(r)} = \sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - a_q g_{oq}^2) \cos \Psi, \quad \bar{\eta}_r^{(r)} = \sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - a_q g_{oq}^2) \sin \Psi; \\ \bar{\mathfrak{a}}_l^{(r)} = \bar{\eta}_l^{(r)} = 0 \quad (4.4.4)$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2} (1 + g_{oq}^2 \varepsilon_q), \quad (4.4.5)$$

где a_q определено (4.3.8), ε_q – (4.3.11).

В данном случае матрица ковариаций \mathbf{K} величин $\mathbf{\bar{\alpha}}_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(r)}$ диагональна, поэтому двумерная плотность вероятностей огибающих определяется выражением

$$W(V_r^{(r)}, V_l^{(r)}) = \frac{V_r^{(r)} V_l^{(r)}}{\sigma^4} \exp \left[-\frac{V_r^{(r)} + V_l^{(r)} + \bar{V}_r^{(r)}}{2\sigma^2} \right] I_0 \left(\frac{V_r^{(r)} \bar{V}_r^{(r)}}{\sigma^2} \right), \quad (4.4.6)$$

а вероятность ошибки при приеме незамирающих сигналов после подстановки (4.4.6) в (4.4.1) и интегрирования будет равна

$$p = \frac{1}{2} e^{-h_{\Xi}^2/2}, \quad (4.4.7)$$

где

$$h_{\Xi}^2 = \frac{(\overline{\mathbf{\bar{\alpha}}_r^{(r)}})^2 + (\overline{\eta_r^{(r)}})^2}{2\sigma^2} = \frac{\left[\sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 - a_q g_{oq}^2) \right]^2}{\sum_{q=1}^Q h_q^2 (1 + g_{oq}^2 \varepsilon_q)}. \quad (4.4.8)$$

Зависимость (4.4.7) имеет характер кривых 2, 3, 4 на рис. 4.3.1 соответственно при $\bar{h}_{\Pi}^2 T/\tau_0 = 10^{-1}, 1, 10$, если сдвинуть их вправо по горизонтальной оси приблизительно на 1 дБ (при $p \leq 10^{-3}$). При $R_{\Pi} \ll 1$ (практически при $\bar{h}_{\Pi}^2 T/\tau_0 \approx 10$) соотношение (4.4.8) преобразуется в следующее

$$h_{\Xi}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \frac{g_{oq}^2 \overline{h_{\Pi q}^2}}{1 + \overline{h_{\Pi q}^2}} \right). \quad (4.4.9)$$

Оно характеризует прием при формировании оценок помех на интервале решения. В [144, п. 4.7] показано, что в этом случае можно найти достаточно простое выражение для вероятности ошибки, справедливое как для сигналов с неперекрывающимися спектрами, так и с перекрывающимися, в виде

$$p = \frac{1}{2} e^{-\frac{h_{\Xi}^2}{2}} \left[I_0 \left(\mathcal{R}_0 \frac{h_{\Xi}^2}{2} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \mathcal{R}_0^2}}{1 + \sqrt{1 - \mathcal{R}_0^2}} \right)^{\frac{k}{2}} I_k \left(\mathcal{R}_0 \frac{h_{\Xi}^2}{2} \right) \right], \quad (4.4.10)$$

где h_{Ξ}^2 определяется (4.4.9);

$$\mathcal{R}_0^2 = (\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2) / \sigma^4; \quad (4.4.11)$$

$$\mathcal{R}_1 = -\sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2} \frac{g_{rl}^{(q)} \bar{h}_{\Pi q}^2}{1 + \bar{h}_{\Pi q}^2}, \quad \mathcal{R}_2 = -\sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2} \frac{g_{rl}^{*(q)} \bar{h}_{\Pi q}^2}{1 + \bar{h}_{\Pi q}^2}. \quad (4.4.12)$$

$g_{rl}^{(q)}$ и $g_{rl}^{*(q)}$ определяются (2.5.10) и (2.5.11) в q -й ветви.

Из (4.4.10) при $\mathcal{R}_0 = 0$ следует формула (4.4.7) для сигналов с неперекрывающимися спектрами.

Как видим из (4.4.9), если есть избыточность по сигналу в каждой ветви ($g_{oq}^2 < 1$), то высокая достоверность приема может быть обеспечена даже при поражении всех ветвей разнесения мощными узкополосными помехами ($\bar{h}_{\Pi q}^2 \gg 1$). Если же нет избыточности по сигналу в ветвях разнесения ($g_{oq}^2 = 1$), то высокая достоверность приема может быть обеспечена только благодаря избыточности по ветвям. При $g_{oq}^2 = 1$ из (4.4.9) следует

$$h_{\Xi}^2 = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{1 + h_{\Pi q}^2}. \quad (4.4.13)$$

Это соотношение при подстановке его в (4.4.7) характеризует помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением незамирающих сигналов в условиях действия помех с неразличимыми по сравнению с сигналами структурами, при работе по правилу (4.2.48).

Аналогичный вывод следует также из стохастической модели узкополосных помех при интервалах корреляции помех соизмеримых с длительностью элемента сигнала. В случае стохастической модели вероятность ошибки определяется формулой (4.4.7), в которой

$$h_{\Xi}^2 = \sum_{q=1}^Q \frac{h_q^2}{2E_q} \int_{T_0}^{T_{\alpha}} \left| \underline{Z}_r^{(\Xi)}(t) \right|^2 dt. \quad (4.4.14)$$

Для разложимого ядра корреляционной функции помех

$$h_{\Xi}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{\overline{h_{\Pi iq}^2} g_{oiq}^2}{1 + h_{\Pi iq}^2} \right), \quad (4.4.15)$$

что совпадает с (4.4.9) при $K = 1$.

Подавление узкополосных помех улучшается по мере сужения полосы воздействующих помех и в вырожденном случае неизменных параметров последних, имеем

$$h_{\mathfrak{E}}^2 = \sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \frac{g_{oq}^2}{1+N} \right). \quad (4.4.16)$$

Отсюда следует предельная возможность их полной компенсации (при увеличении N).

Если приемник построен оптимально для условий неизменных параметров помех, а работает при изменяющихся параметрах, то

$$h_{\mathfrak{E}}^2 = \frac{\left[\sum_{q=1}^Q h_q^2 \left(1 - \frac{g_{oq}^2}{1+N} \right) \right]^2}{\sum_{q=1}^Q h_q^2 \left[1 + \frac{g_{oq}^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\pi q} \overline{h_{nq}^2} - 1 \right) \right]}. \quad (4.4.17)$$

В этом случае проигрыш по сравнению с оптимальным приемником не существенный при $\overline{h_{nq}^2} T / \tau_0 = 10^{-1}$ и 1 и значительный при $\overline{h_{nq}^2} T / \tau_0 = 10$ (смотри кривую 5 на рис. 4.3.1).

Прием замирающих сигналов. Для определения вероятности ошибки при приеме замирающих сигналов надо усреднить (4.4.7) в соответствии с распределением h_q^2 . Пусть замирания в ветвях разнесения релейские и полностью коррелированы, тогда с учетом $\overline{h_q^2} = \text{const}(q)$ вероятность ошибки будет равна

$$p = \int_0^{\infty} \frac{2\mu}{\mu^2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu^2}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2 \overline{h_{\mathfrak{E}}^2}}{\mu^2 2}} \right) d\mu = \frac{1}{\overline{h_{\mathfrak{E}}^2} + 2} \approx \frac{1}{\overline{h_{\mathfrak{E}}^2}}. \quad (4.4.18)$$

где $\overline{h_{\mathfrak{E}}^2}$ – среднестатистическое значение $h_{\mathfrak{E}}^2$, определяемое формулами (4.4.8), (4.4.9), (4.4.13)–(4.4.17) при замене в них h_q^2 на $\overline{h_q^2}$. Сравнивая (4.4.18) с (4.3.26), видим, что при полностью коррелированных релейских замираниях сигналов в ветвях с узкополосными помехами некогерентный разнесенный прием с когерентным сложением сигналов проигрывает когерентному разнесенному приему 3 дБ.

При независимых релейевских замираниях сигналов в ветвях разнесения, в условиях статистической однородности ветвей по узкополосным помехам

$$\begin{aligned} \overline{h_{пq}^2} = \overline{h_{п}^2} = \text{const}(q), \quad a_q = a = \text{const}(q), \\ \varepsilon_q = \varepsilon = \text{const}(q), \quad g_{oq}^2 = g_o^2 = \text{const}(q), \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

вероятность ошибки будет определяться соотношением

$$P = \int_{G(\mu)} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \frac{\mu_q^2}{\mu_q^2} \overline{h_q^2} \frac{(1 - a g_o^2)^2}{1 + \varepsilon g_o^2} \right] \prod_{q=1}^Q \frac{\mu_q}{\mu_q^2} e^{-\frac{\mu_q^2}{\mu_q^2}} dG(\mu) = \frac{2^{Q-1}}{\prod_{q=1}^Q (\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} + 2)}, \quad (4.4.20)$$

где

$$\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} = \overline{h_q^2} \frac{(1 - a g_o^2)^2}{1 + \varepsilon g_o^2}; \quad (4.4.21)$$

$\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} = \overline{h^2} / Q^s$, $0 \leq S \leq 2$, a и ε определяются (4.3.8) и (4.3.11).

Зависимость (4.4.20) аналогична по характеру кривым 6–9 (при $Q=2$) и 11–14 (при $Q=1$) на рис. 4.3.1. Энергетический проигрыш некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов по сравнению с когерентным разнесенным приемом в условиях релейевских замираний (при $\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} \gg 1$) составляет величину

$$\mathcal{D} = 2^{2Q-1} / C_{2Q-1}^Q. \quad (4.4.22)$$

При $R_{пq} \ll 1$ выражение (4.4.21) преобразуется к виду

$$\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} = \overline{h_q^2} \left(1 - \frac{g_o^2 \overline{h_{п}^2}}{1 + \overline{h_{п}^2}} \right), \quad (4.4.23)$$

а при $R_{пq} = 1$ имеет место соотношение

$$\overline{h_{\mathcal{E}q}^2} = \overline{h_q^2} \left(1 - \frac{g_o^2}{1 + N} \right). \quad (4.4.24)$$

Этими формулами определяются границы подавления узкополосных помех в пределах от режекции отдельных составляющих при быстрых изменениях параметров помех, до компенсации при неизменных параметрах. Из (4.4.23), при $g_o^2 = 1$, следует выражение, характеризующее помехоустойчивость приема в условиях неразличимых структур сигнала и узкополосных помех

$$\overline{h_{\Xi q}^2} = \overline{h_q^2} / \left(1 + \overline{h_{\Pi}^2}\right). \quad (4.4.25)$$

Интересно заметить, что, если в условиях постоянной интенсивности узкополосных помех с ростом кратности разнесения рост выигрыша замедляется, то при воздействии помех с изменяющейся интенсивностью, такого замедления может и не наблюдаться. Вероятность ошибки в этих условиях можно определить путем усреднения (4.4.20) с учетом (4.4.25) в соответствии с распределением $\overline{h_{\Pi}^2}$. Рассмотрим, например, случай логарифмически-нормального закона изменения интенсивности помех независимо по ветвям разнесения. Для статистически однородных каналов вероятность ошибки будет определяться выражением

$$\overline{p} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\ln^2 \frac{\overline{h_{\Pi}^2}}{h_{\Pi o}^2} / 2\sigma_{\Pi}^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Pi}\overline{h_{\Pi}^2} \left(\frac{\overline{h_Q^2}}{1 + \overline{h_{\Pi}^2}} + 2\right)} d\overline{h_{\Pi}^2} \right\}^Q, \quad (4.4.26)$$

где σ_{Π} – параметр рассеяния в логарифмически-нормальном распределении.

Для иллюстрации на рис. 4.4.1–4.4.6 приведены зависимости средних вероятностей ошибок \overline{p} от $\overline{h^2} = Q\overline{h_Q^2}$ при разных Q и $\overline{h_{\Pi o}^2}$, вычисленные методом численного интегрирования на ЭВМ по формуле (4.4.26). Параметр рассеяния при этом $\sigma_{\Pi} = 2,3$ (10 дБ).

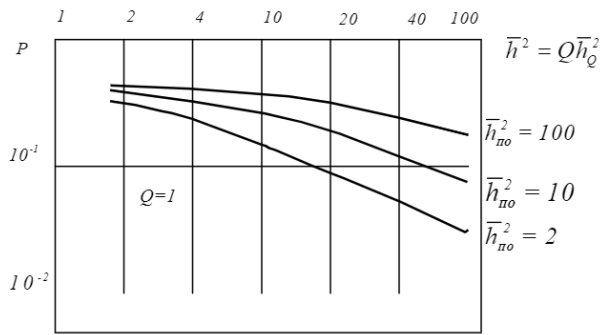


Рис. 4.4.1

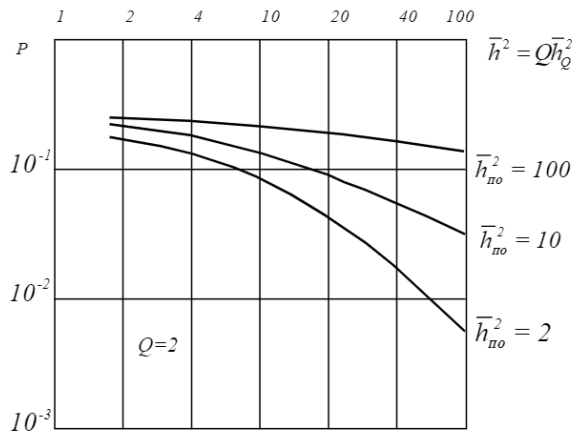
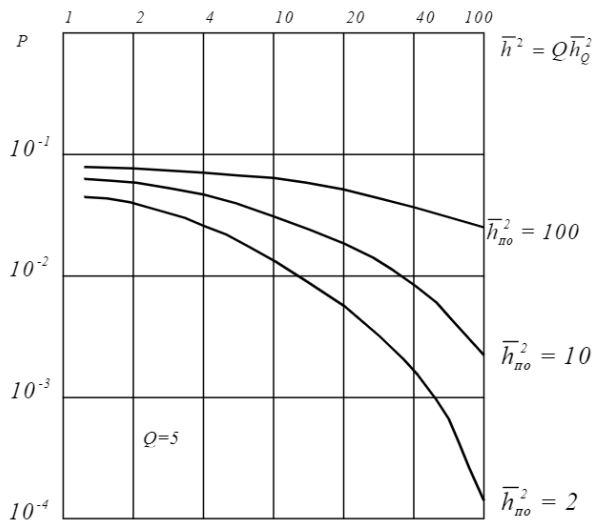
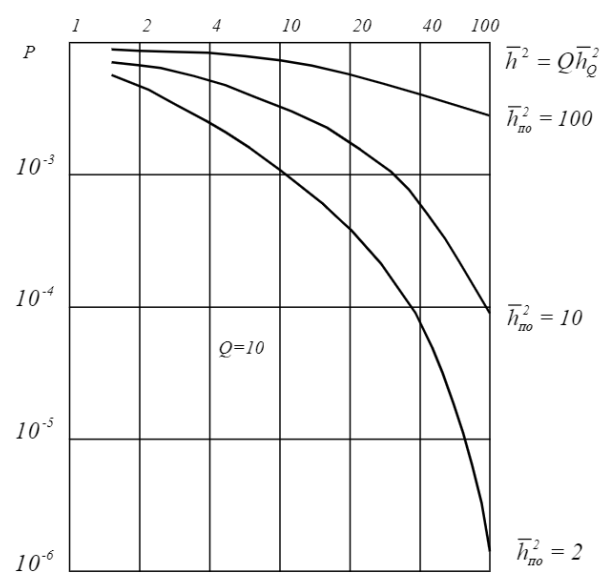


Рис. 4.4.2



Puc. 4.4.3



Puc. 4.4.4

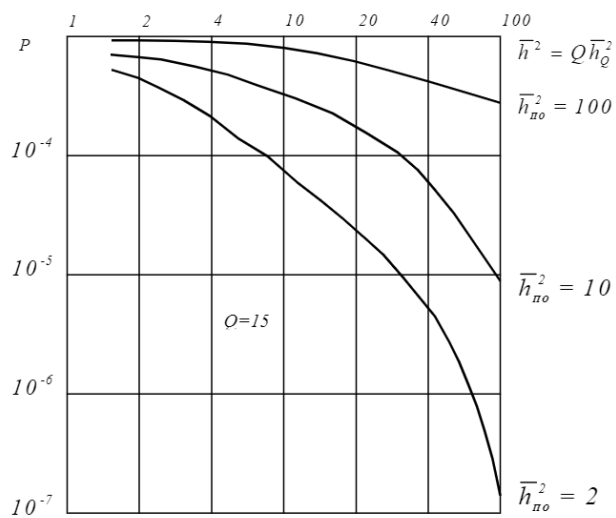


Рис. 4.4.5

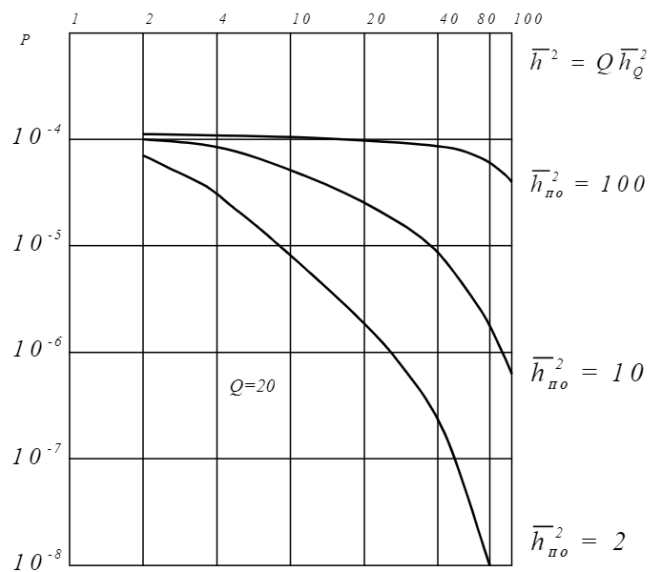


Рис. 4.4.6

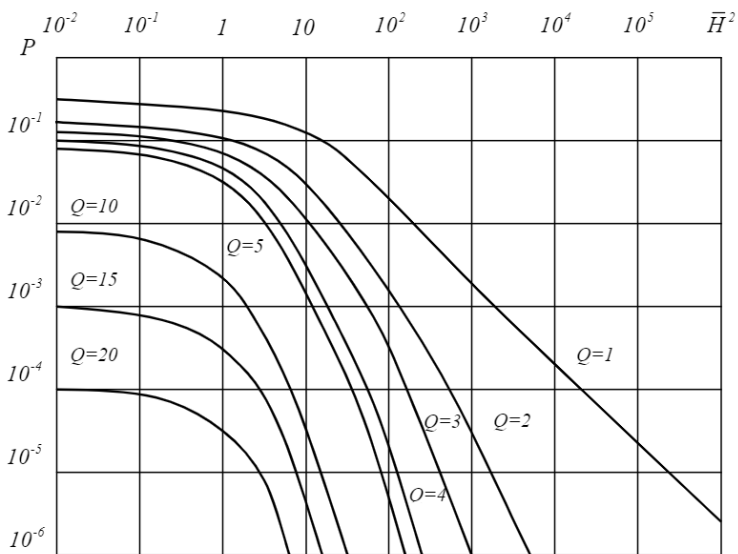


Рис. 4.4.7

На рис. 4.4.7 приведены зависимости \bar{P} от величины отношения средних энергий сигнала и узкополосных помех $\bar{H}^2 = Q \frac{\bar{\mu}_q^2 E_q}{\mu_{\text{по}}^2 E_{\text{п}}}$ при отсутствии флук-

туационных шумов ($\nu_q^2 = 0$). Кривые показывают, что помехоустойчивость приема в условиях действия изменяющихся по интенсивности помех увеличивается с ростом кратности разнесения вследствие того, что замирания сигналов и помех в ветвях разнесения не коррелированы и поэтому вероятность превышения сигнала над помехами в каждый момент времени с ростом числа ветвей увеличивается.

Далее, если приемник построен оптимально для условий неизменных параметров помех, а работает при изменяющихся параметрах, то в (4.4.20)

$$\bar{h}_{\text{эq}}^2 = \bar{h}_q^2 \frac{\left(1 - \frac{g_o^2}{1+N}\right)^2}{1 + \frac{g_o^2}{1+N} \left(\frac{N^2}{1+N} r_{\text{п}} \bar{h}_{\text{п}}^2 - 1\right)}. \quad (4.4.27)$$

При этом, как и при когерентном разнесенном приеме, проигрыш по сравнению с оптимальным приемником не существенный при $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10^{-1}$ и 1 и значительный при $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10$. Характер зависимостей $p = f(\overline{h^2})$ при $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10^{-1}$ и 1 такой же, как на рис. 4.3.1 у кривых 7 и 8 при $Q=2$, 12 и 13 при $Q=1$, если сдвинуть кривые при $Q=2$ вверх по оси ординат приблизительно на 4 дБ, а при $Q=1$ – на 3 дБ. При $\overline{h_{\Pi}^2} T/\tau_0 = 10$ характер зависимостей аналогичен кривым 10 и 15 (с учетом соответствующего сдвига вверх по оси ординат кривой 10 на 4 дБ и кривой 15 на 3 дБ).

В условиях воздействия стохастических узкополосных помех вероятность ошибки определяется формулой (4.4.20), в которой

$$\overline{h_{\Sigma q}^2} = \frac{\overline{h_q^2} T_{\alpha}}{2} \int_{T_0}^{\infty} \left| Z_r^{(\Sigma)}(t) \right|^2 dt. \quad (4.4.28)$$

В частности, для разложимого ядра корреляционной функции помех

$$\overline{h_{\Sigma q}^2} = \overline{h_q^2} \left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{\overline{h_{\Pi i}^2} g_{oi}^2}{1 + \overline{h_{\Pi i}^2}} \right), \quad (4.4.29)$$

что совпадает с (4.4.23) при $K=1$.

Полученные выше формулы для $\overline{h_{\Sigma q}^2}$ (4.4.21)–(4.4.29) позволяют определить помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов в каналах с обобщенными релеевскими замираниями и замираниями, подчиняющимися m -распределению. При обобщенных релеевских замираниях в ветвях разнесения вероятность ошибки определяется выражением

$$p = 2^{Q-1} \prod_{q=1}^Q p_q, \quad (4.4.30)$$

где

$$p_q = \frac{1 + d_q^2}{2(1 + d_q^2) + \overline{h_{\Sigma q}^2}} \exp \left[-\frac{d_q^2 \overline{h_{\Sigma q}^2}}{2(1 + d_q^2) + \overline{h_{\Sigma q}^2}} \right]. \quad (4.4.31)$$

Здесь $d_q^2 = \mu_{pq}^2 / \mu_{\phi q}^2$.

При замираниях в ветвях типа m -распределения вероятность ошибки имеет вид:

$$p = \frac{1}{2} \prod_{q=1}^Q \frac{(2m_q)^{m_q}}{[2m_q + \bar{h}_{\varepsilon q}^2]^{m_q}}, \quad (4.4.32)$$

где m_q – параметр распределения в q -й ветви. Анализ полученных соотношений показывает возможности подавления узкополосных помех в зависимости от их структуры, интенсивности и скорости изменения параметров аналогичные рассмотренным выше для релейских замираний сигналов.

4.5. Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам

Проведем анализ помехоустойчивости приема двоичных ортогональных в усиленном смысле сигналов с одинаковыми энергиями при работе по правилу (4.2.50). Вероятность ошибки найдем по формуле (4.3.1), в которой

$$\mathfrak{a}^{(r)} = \sum_{q=1}^Q \mathfrak{a}_q^{(r)} = \sum_{q=1}^Q [\chi_{1q}^{(r)^2} + \eta_{1q}^{(r)^2} - \chi_{2q}^{(r)^2} - \eta_{2q}^{(r)^2}], \quad (4.5.1)$$

где, согласно (4.2.50),

$$\chi_{lq}^{(r)^2} = \frac{2\bar{h}_q^2 X_{lq}^{(r)^2}}{v_q^2 E_q (1 + \bar{h}_q^2 B_{lq})}, \quad \eta_{lq}^{(r)^2} = \frac{2\bar{h}_q^2 Y_{lq}^{(r)^2}}{v_q^2 E_q (1 + \bar{h}_q^2 B_{lq})}, \quad r, l = 1, 2. \quad (4.5.2)$$

Пороговый уровень в (4.3.1) определяется выражением

$$A = 2 \sum_{q=1}^Q \ln \frac{1 + \bar{h}_q^2 B_{rq}}{1 + \bar{h}_q^2 B_{lq}}. \quad (4.5.3)$$

При независимых релейских замираниях сигналов и узкополосных помех в ветвях разнесения составляющие $\chi_{lq}^{(r)}$ и $\eta_{lq}^{(r)}$ являются нормальными случайными величинами с нулевыми средними значениями и независимыми для различных ветвей, т. е. при $k \neq q$ и $r, l = 1, 2$ $\overline{\chi_{lq}^{(r)} \chi_{rk}^{(r)}} = \overline{\chi_{lq}^{(r)} \eta_{rk}^{(r)}} = 0$.

Плотность вероятности $W(\mathfrak{a}^{(r)})$ определяется собственными числами матрицы $F = [KJ]$, где K – ковариационная матрица, элементы которой равны

$$k_{qk} = \overline{\chi_{lq}^{(r)} \chi_{rk}^{(r)}} + \overline{\chi_{lq}^{(r)} \eta_{rk}^{(r)}}, \quad k_{qk}^* = \overline{\chi_{lq}^{(r)} \chi_{rk}^{(r)}} - \overline{\chi_{lq}^{(r)} \eta_{rk}^{(r)}}; \quad (4.5.4)$$

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $\mathfrak{a}^{(r)}$, здесь \mathbf{I} – единичная матрица.

Учитывая независимость замираний сигналов и помех различных ветвей разнесения и то, что в каждой ветви выполняются условия:

$$\overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} = \overline{\eta_{1q}^{(r)^2}}, \quad \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}} = \overline{\eta_{2q}^{(r)^2}}, \quad \overline{\chi_{1q}^{(r)} \eta_{1q}^{(r)}} = \overline{\chi_{2q}^{(r)} \eta_{2q}^{(r)}} = 0,$$

ковариационную матрицу \mathbf{K} можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha^{(r)} & \delta^{(r)*} \\ \delta^{(r)} & \varepsilon^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (4.5.5)$$

где

$$\alpha_{qq}^{(r)} = \overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} = \overline{\eta_{1q}^{(r)^2}}, \quad \varepsilon_{qq}^{(r)} = \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}} = \overline{\eta_{2q}^{(r)^2}}, \quad (4.5.6)$$

$$\delta_{qq}^{(r)} = \overline{\chi_{1q}^{(r)} \chi_{2q}^{(r)}} + \overline{\chi_{1q}^{(r)} \eta_{2q}^{(r)}}, \quad \delta_{qq}^{(r)*} = \overline{\chi_{1q}^{(r)} \chi_{2q}^{(r)}} - \overline{\chi_{1q}^{(r)} \eta_{2q}^{(r)}},$$

$$\alpha_{qk}^{(r)} = \delta_{qk}^{(r)} = \delta_{qk}^{(r)*} = \varepsilon_{qk}^{(r)} = 0 \quad \text{при } q \neq k.$$

Решая характеристическое уравнение $|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, путем разбиения матрицы \mathbf{F} на блоки, находим положительные значения $\gamma_q^{(r)}$ и модули отрицательных значений $\beta_q^{(r)}$ собственных чисел матрицы \mathbf{F} в форме:

$$\begin{aligned} \gamma_q^{(r)} = \lambda_{1q}^{(r)} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} + \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}} \right)^2 - 4\overline{\chi_q^{(r)}} + \overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} - \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}}} \right], \\ \beta_q^{(r)} = -\lambda_{2q}^{(r)} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} + \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}} \right)^2 - 4\overline{\chi_q^{(r)}} - \overline{\chi_{1q}^{(r)^2}} + \overline{\chi_{2q}^{(r)^2}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Здесь в соответствии с (4.5.2)

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{rq}^{(r)^2}} &= \frac{\overline{h_q^2}}{1 + \overline{h_q^2} B_{rq}} \left[\overline{h_q^2} (1 - a_q g_{orq}^2) + 1 + \varepsilon_q g_{orq}^2 \right], \\ \overline{\chi_{lq}^{(r)^2}} &= \frac{\overline{h_q^2}}{1 + \overline{h_q^2} B_{lq}} \left[\overline{h_q^2} a_q^2 g_{orq}^2 g_{olq}^2 + 1 + \varepsilon_q g_{olq}^2 \right], \\ \chi_q^{(r)} &= \left(\overline{\chi_{1q}^{(r)} \chi_{2q}^{(r)}} \right)^2 + \left(\overline{\chi_{1q}^{(r)} \eta_{2q}^{(r)}} \right)^2 = \\ &= \frac{(\overline{h_q^2})^2 g_{orq}^2 g_{olq}^2}{(1 + \overline{h_q^2} B_{rq})(1 + \overline{h_q^2} B_{lq})} \left[a_q \overline{h_q^2} (1 - a_q g_{orq}^2) - \varepsilon_q \right]^2. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

В этих соотношениях a_q и ε_q определяются так же, как и в (4.3.8), (4.3.11) или (4.3.19).

Плотность вероятности квадратичной формы $\mathfrak{a}^{(r)}$ имеет вид [109, 203]:

$$W(\mathfrak{a}^{(r)}) = \begin{cases} \sum_{q=1}^Q \frac{c_q^{(r)}}{2\gamma_q^{(r)}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{a}^{(r)}}{2\gamma_q^{(r)}}\right), & \mathfrak{a}^{(r)} > 0, \\ \sum_{q=1}^Q \frac{d_q^{(r)}}{2\beta_q^{(r)}} \exp\left(\frac{\mathfrak{a}^{(r)}}{2\beta_q^{(r)}}\right), & \mathfrak{a}^{(r)} < 0, \end{cases} \quad (4.5.9)$$

где

$$\begin{aligned} c_q^{(r)} &= \left[\prod_{k=1}^Q \left(1 + \frac{\beta_k^{(r)}}{\gamma_q^{(r)}} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q \left(1 - \frac{\gamma_k^{(r)}}{\gamma_q^{(r)}} \right) \right]^{-1}, \\ d_q^{(r)} &= \left[\prod_{k=1}^Q \left(1 + \frac{\gamma_k^{(r)}}{\beta_q^{(r)}} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q \left(1 - \frac{\beta_k^{(r)}}{\beta_q^{(r)}} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

После подстановки (4.5.9) в (4.3.1) получим следующие выражения для вероятности ошибки при некогерентном разнесенном приеме:
при $A < 0$

$$p = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \left\{ d_q^{(1)} \exp\left(-\frac{|A|}{2\beta_q^{(1)}}\right) + d_q^{(2)} \left[1 - \exp\left(-\frac{|A|}{2\beta_q^{(2)}}\right) \right] + c_q^{(2)} \right\}, \quad (4.5.11)$$

при $A > 0$

$$p = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \left\{ c_q^{(1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{A}{2\gamma_q^{(1)}}\right) \right] + c_q^{(2)} \exp\left(-\frac{A}{2\gamma_q^{(2)}}\right) + d_q^{(1)} \right\}, \quad (4.5.12)$$

при $A = 0$

$$p = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \left\{ d_q^{(1)} + c_q^{(2)} \right\}. \quad (4.5.13)$$

Подставляя в (4.5.11)–(4.5.13) соотношения (4.5.7) с учетом (4.5.8), можно рассчитать помехоустойчивость приема с квадратичным сложением сигналов в каждом конкретном случае. В частности, при симметричном поражении узкополосными помехами обоих вариантов сигналов ($g_{01q}^2 = g_{02q}^2 = g_{0q}^2$) в условиях высокой верности приема вероятность ошибки можно вычислить по формуле

$$p \approx C_{2Q-1}^Q \prod_{q=1}^Q P_q, \quad (4.5.14)$$

где

$$P_q = \frac{\beta_q^{(1)}}{\gamma_q^{(1)} + \beta_q^{(1)}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\overline{h}_q^2 (1 - 2a_q g_{0q}^2)}{\sqrt{(\overline{h}_q^2 + 2)[\overline{h}_q^2 (1 - 2a_q g_{0q}^2) + 2 + 4g_{0q}^2 \varepsilon_q]}} \right\} \quad (4.5.15)$$

– для сигналов с перекрывающимися спектрами;

$$P_q = \frac{1 + g_{0q}^2 \varepsilon_q}{\overline{h}_q^2 (1 - a_q g_{0q}^2)^2 + 2 + (1 + g_{0q}^2 \varepsilon_q)} \quad (4.5.16)$$

– для сигналов с неперекрывающимися спектрами.

При условии $\overline{h}_q^2 (1 - \theta a_q g_{0q}^2) \gg 2$ формулы (4.5.15), (4.5.16) можно записать в виде

$$P_q \approx \frac{1 + g_{oq}^2 \varepsilon_q}{h_q^2 (1 - \theta a_q g_{oq}^2)}. \quad (4.5.17)$$

Здесь $\theta = 2$ для сигналов с перекрывающимися спектрами, $\theta = 1$ для сигналов с неперекрывающимися спектрами.

Из (4.5.15)–(4.5.17) следуют частные случаи:

1. Случай быстрых изменений параметров узкополосных помех ($R_{nq} \ll 1$).

При этом для сигналов с перекрывающимися спектрами

$$P_q = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\overline{h_q^2} \sqrt{1 - \frac{2g_{oq}^2 \overline{h_{nq}^2}}{1 + \overline{h_{nq}^2}}}}{\sqrt{(\overline{h_q^2} + 2) \left[\overline{h_q^2} \left(1 - \frac{2g_{oq}^2 \overline{h_{nq}^2}}{1 + \overline{h_{nq}^2}} \right) + 2 \right]}} \right\}, \quad (4.5.18)$$

что совпадает с (4.10.20) из [144].

Для сигналов с неперекрывающимися спектрами в этих же условиях вероятность ошибки в q -й ветви равна

$$P_q = \left[\overline{h_q^2} \left(1 - \frac{g_{oq}^2 \overline{h_{nq}^2}}{1 + \overline{h_{nq}^2}} \right) + 2 \right]^{-1}, \quad (4.5.19)$$

что совпадает с (4.10.23) из [144].

Из (4.5.18), (4.5.19) видно, что при $\overline{h_{nq}^2} \gg 1$ высокая достоверность приема может быть достигнута благодаря избыточности по сигналу в каждой ветви (при поражении всех ветвей разнесения мощными узкополосными помехами). Причем, сигналы с перекрывающимися спектрами требуют большей избыточности ($2g_{oq}^2 < 1$), чем сигналы с неперекрывающимися спектрами ($g_{oq}^2 < 1$).

При отсутствии избыточности по сигналу в каждой ветви, высокая достоверность приема может быть обеспечена ветвями с малой интенсивностью помех, т. е. избыточностью по ветвям. Так, в случае воздействия узкополосных помех с неразличимой по сравнению с сигналом структурой ($g_{oq}^2 = 1$) из (4.5.14) и (4.5.19) следует

$$p \approx C_{2Q-1}^Q / \prod_{q=1}^Q \left(\frac{\overline{h_q^2}}{1 + h_{\Pi q}^2} + 2 \right). \quad (4.5.20)$$

Если, в свою очередь, $\overline{h_{\Pi q}^2}$ в (4.5.20) меняются по логарифмически-нормальному закону, то характер кривых $p = f(\overline{h^2})$ такой же, как на рис. 4.4.1–4.4.7 с учетом проигрыша некогерентного разнесенного приема с квадратичным сложением по сравнению с некогерентным при когерентном сложении разнесенных сигналов, равного

$$\mathcal{E} = C_{2Q-1}^Q / 2^{Q-1}. \quad (4.5.21)$$

В частности, при $Q = 2$ $\mathcal{E} = 1,75$ дБ, при $Q = 3$ $\mathcal{E} = 4$ дБ. Для полноты картины заметим, что некогерентный разнесенный прием по сравнению с когерентным разнесенным приемом в условиях воздействия узкополосных помех, как и в каналах только с флуктуационным шумом, имеет проигрыш $\mathcal{E} = 2^Q$.

2. Случай неизменных параметров узкополосных помех ($R_{\Pi q} = 1, r_{\Pi q} = 0$). При этом из (4.5.15), (4.5.16) с учетом (4.3.19) следует $a_q = -\varepsilon_q = 1/(N+1)$, поэтому вероятность ошибки в q -й ветви равна

$$p_q = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\overline{h_q^2} \sqrt{1 - 2g_{oq}^2/(N+1)}}{\sqrt{(\overline{h_q^2} + 2) \left[\overline{h_q^2} \left(1 - 2g_{oq}^2/(N+1) \right) + 2 \right]}} \right\} \quad (4.5.22)$$

– для сигналов с перекрывающимися спектрами;

$$p_q = \left[\overline{h_q^2} \left(1 - 2g_{oq}^2/(N+1) \right) + 2 \right]^{-1} \quad (4.5.23)$$

– для сигналов с неперекрывающимися спектрами.

Из (4.5.22), (4.5.23) видно, что при $N \gg 1$ узкополосные помехи полностью подавляются и оба эти выражения сходятся к формуле

$$p_q = \left(\overline{h_q^2} + 2 \right)^{-1}, \quad (4.5.24)$$

которая совместно с (4.5.14) характеризует помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема при флуктуационном шуме [198]. Практически хорошая сходимость получается уже при $N \approx 3-4$.

Если приемник построен оптимально для условий неизменных параметров узкополосных помех, а работает при изменяющихся параметрах, то после подстановки в (4.5.17) a_q и ε_q из (4.3.19) получим при $\overline{h_q^2} \left(1 - \theta g_{oq}^2 / (N + 1)\right) \gg 1$ следующее приближенное выражение для вероятности ошибки в q -й ветви

$$p_q \approx \frac{1 + \frac{g_{oq}^2}{1 + N} \left(\frac{N^2}{1 + N} \overline{h_{nq}^2} r_{nq} - 1 \right)}{\overline{h_q^2} \left(1 - \theta g_{oq}^2 / (N + 1)\right)^2}. \quad (4.5.25)$$

Здесь при $\overline{h_{nq}^2} T / \tau_0 \geq 10$ проигрыш по сравнению с оптимальным приемником существенный (≈ 7 дБ), что указывает на нецелесообразность использования неоптимальных методов измерения параметров помех.

В условиях воздействия стохастических узкополосных помех вероятность ошибки в q -й ветви для сигналов с неперекрывающимися спектрами будет равна

$$p_q = \left[\frac{\overline{h_q^2}}{2E_q} \int_{T_0}^{T_a} \left| \underline{Z}_r^{(\varepsilon)}(t) \right|^2 dt + 2 \right]^{-1}. \quad (4.5.26)$$

В частном случае разложимого ядра корреляционной функции помех

$$p_q = \left[\overline{h_q^2} \left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{\overline{h_{nqi}^2} g_{oqi}^2}{1 + \overline{h_{nqi}^2}} \right) \right]^{-1}, \quad (4.5.27)$$

что совпадает с (4.5.19) при $K=1$.

Для иллюстрации на рис. 4.5.1 приведены зависимости вероятности ошибки p от величины $\overline{h^2}$ для одиночного, двоянного и счетверенного приема сигналов с неперекрывающимися спектрами при $g_{oq}^2 = 0,5$; $\overline{h_{nq}^2} = 100$; $\overline{h_q^2} = \overline{h^2}$.

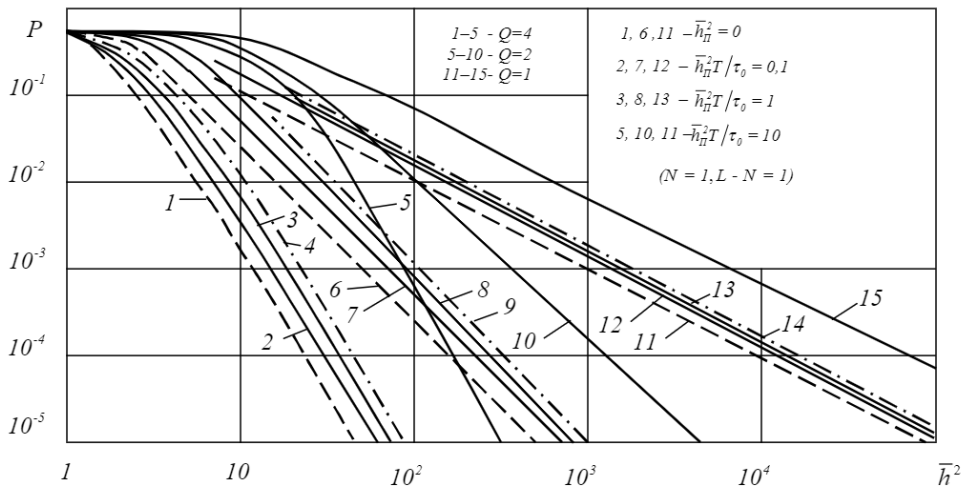


Рис. 4.5.1. Зависимости вероятности ошибки p от величины $\overline{h^2}$

Кривые 2, 3, 4; 7, 8, 9; 12, 13, 14 рассчитаны по формуле (4.5.14) с учетом (4.5.16), (4.3.8), (4.3.11) соответственно при $T/\tau_0 = 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} ($\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 10^{-1}$, 1, 10) для случая оптимального построения приемника при марковских изменениях параметров узкополосных помех. Здесь же для сравнения приведены зависимости вероятности ошибки p от $\overline{h^2}$ для каналов только с флуктуационным шумом (кривые 1, 6, 11). При $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 0,1$ энергетический проигрыш от воздействия узкополосных помех составляет величину порядка 1,5 дБ, а при $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 1$ – приблизительно 2,4 дБ. В этих условиях режекция узкополосных помех приводит к проигрышу порядка 3 дБ.

Таким образом, при $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 \geq 1$ использование для обучения предшествующего интервала времени не дает существенного улучшения помехоустойчивости даже при оптимальном построении приемника. На этом же рисунке приведены зависимости p от $\overline{h^2}$ для неоптимального приемника в условиях изменяющихся параметров помех, рассчитанные по формуле (4.5.14) с учетом (4.5.25), (4.3.19), (2.4.31) при $N=1$, $L-N=1$ и $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 10^{-1}$, 1, 10. Анализ показывает, что при $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 0,1$ зависимости p от $\overline{h^2}$ совпадают с кривыми 2, 7, 12; при $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 1$ зависимости p от $\overline{h^2}$ совпадают с кривыми 4, 9, 14, т. е. различие в помехоустойчивости оптимального и неоптимального приемников незначительное. При $\overline{h_n^2 T}/\tau_0 = 10$ проигрыш неоптимального приемника су-

шественный (кривые 5, 10, 15). В этих условиях более целесообразна режекция узкополосных помех. Приведенные зависимости показывают, что переход от одиночного приема к сдвоенному в условиях действия узкополосных помех позволяет получить энергетический выигрыш порядка 17 дБ (при $p \approx 10^{-4}$), а последующий переход к $Q = 4$ дает дополнительный выигрыш ≈ 9 дБ. При этом, как и в каналах с флуктуационным шумом, увеличение кратности разнесения всегда улучшает помехоустойчивость лишь при приеме на разнесенные антенны. При разнесении во времени или по частоте существует оптимальное число ветвей разнесения, зависящее от $\overline{h^2}$. В частности при $\overline{h^2} = 30$ $Q_{opt} = 10$.

Заметим, что в условиях неизвестной спектральной плотности шума в ветвях приведенные в этом параграфе формулы для вероятностей ошибок являются предельными, к которым сходятся значения $p = f(N)$, если оценивать неизвестные v_q^2 с помощью выражений (4.2.28), (4.2.34), (4.2.57). Сходимость обеспечивается с достаточной для практики точностью при $N \approx 20$.

5. АДАПТИВНЫЙ РАЗНЕСЕННЫЙ ПРИЕМ С ОБУЧЕНИЕМ ПО СИГНАЛУ И ПО УЗКОПОЛОСНЫМ ПОМЕХАМ

5.1. Вводные замечания

Разнесенный прием с измерением параметров канала в условиях действия флуктуационных помех рассматривался в работе [4]. Адаптивный разнесенный прием с обучением по сигналу и по узкополосным помехам исследовался в работах [144, 170, 171, 178, 179, 180, 181 и др.]. В данной главе приведем результаты исследований, относящиеся к

1) синтезу алгоритмов приема с обучением по сигналу после предварительного обучения по узкополосным помехам;

2) синтезу алгоритмов приема с совместным обучением по сигналу и по узкополосным помехам;

3) анализу помехоустойчивости приема при совместном обучении по сигналу и по узкополосным помехам;

4) синтезу алгоритмов приема при неполной разделимости сигналов в различных ветвях разнесения, что позволит, в частности, проанализировать прием в каналах с многолучевостью, представляющий большой практический интерес.

5.2. Алгоритмы приема при полной разделимости сигналов

Поступающую на вход приемника совокупность сигнала и помех в q -й ветви разнесения представим соотношением (4.1.1). В соответствии с критерием идеального наблюдателя правило решения о приеме r -го сигнала будет определяться неравенством

$$\sum_{q=1}^Q \ln \Lambda_{r/l}^{(q)} > 0, \quad r \neq l, \quad (5.2.1)$$

где $\Lambda_{r/l}^{(q)}$ – отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно l -го в q -й ветви разнесения, в котором априорные распределения неизвестных параметров заменены апостериорными, сформированными при помощи обучающих выборок (3.2.2), (4.1.2):

$$\Lambda_{r/l}^{(q)} = \frac{\int W_q(\boldsymbol{\mu}/\mathbf{Z}'_M) W_q(\boldsymbol{\mu}_\Pi/\mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q/\mathbf{Z}'_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_\Pi}{\int W_q(\boldsymbol{\mu}/\mathbf{Z}'_M) W_q(\boldsymbol{\mu}_\Pi/\mathbf{x}_N) \mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q/\mathbf{Z}'_l, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\mu}_\Pi}. \quad (5.2.2)$$

Здесь $\mathcal{F}_q(\mathbf{Z}'_q/\mathbf{Z}'_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi)$ – функционал отношения правдоподобия (4.2.3);

$W_q(\boldsymbol{\mu}_\Pi / \mathbf{x}_N)$ – апостериорное распределение параметров узкополосных помех в q -й ветви;

$W_q(\boldsymbol{\mu} / \mathbf{Z}'_M)$ – апостериорное распределение параметров сигнала в q -й ветви.

Возможны два варианта обучения. В первом – формирование оценок сигнала происходит на интервале $(M - N)T$ после того, как сформирована оценка узкополосных помех на интервале $0 - NT$. Во втором варианте ведется совместное формирование оценок сигнала и узкополосных помех на интервале $0 - MT$.

Функционал отношения правдоподобия обучающей выборки сигнала в q -й ветви представим в виде:

$$\mathcal{F}_q^{(M)}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\Pi) = \exp \left\langle \frac{2}{V_q^2} \sum_{k=N+1}^M \int_{(k-1)T}^{kT} \{Z'_{qk}(t) [\mu_{cq} Z_r(t) + \mu_{sq} \tilde{Z}_r(t) + \mu_{c\pi q} Z_{\pi q}(t) + \mu_{s\pi q} \tilde{Z}_{\pi q}(t)] - \frac{1}{2} [\mu_{cq} Z_r(t) + \mu_{sq} \tilde{Z}_r(t) + \mu_{c\pi q} Z_{\pi q}(t) + \mu_{s\pi q} \tilde{Z}_{\pi q}(t)]^2 \} dt \right\rangle \quad (5.2.3)$$

После усреднения выражения (5.2.3) по апостериорному распределению параметров узкополосных помех (4.2.5) получим

$$\mathcal{F}_q^{(M)}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\mu}) = \text{const} \exp \left\{ \frac{1}{\hat{\sigma}_{cq}^2} \sum_{k=N+1}^M [\mu_{cq}^{(k)} \hat{\mu}_{cq}^{(k)} + \mu_{sq}^{(k)} \hat{\mu}_{sq}^{(k)} - \frac{1}{2} (\mu_{cq}^{(k)2} + \mu_{sq}^{(k)2}) B_{sq}] \right\}, \quad (5.2.4)$$

где $\hat{\mu}_{cq}^{(k)}$ и $\hat{\mu}_{sq}^{(k)}$ – максимально правдоподобные оценки параметров сигнала μ_{cq} и μ_{sq} на k -м этапе наблюдения в q -й ветви. Они определяются следующими выражениями:

1. При формировании оценок с помощью классифицированной обучающей выборки сигнала

$$\hat{\mu}_{cq}^{(k)} = \frac{X_{rq}^{(k)}}{E_q}, \quad \hat{\mu}_{sq}^{(k)} = \frac{Y_{rq}^{(k)}}{E_q}, \quad (5.2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
X_{rq}^{(k)} &= \int_{(k-1)T}^{kT} [Z'_{qk}(t) - \hat{Z}_{\pi q}(t)] Z_r(t) dt, \\
Y_{rq}^{(k)} &= \int_{(k-1)T}^{kT} [Z'_{qk}(t) - \hat{Z}_{\pi q}(t)] \tilde{Z}_r(t) dt.
\end{aligned}
\tag{5.2.6}$$

При этом в (5.2.4)

$$B_{\Sigma q} = B_{rq}, \tag{5.2.7}$$

где B_{rq} определяется формулой (4.2.13).

2. При формировании оценок с помощью неклассифицированной обучающей выборки сигнала

$$\hat{\mu}_{cq}^{(k)} = \frac{\sum_{r=1}^m X_{rq}^{(k)}}{E_q}, \quad \hat{\mu}_{sq}^{(k)} = \frac{\sum_{r=1}^m Y_{rq}^{(k)}}{E_q}, \tag{5.2.8}$$

где m – алфавит сигнала;

$X_{rq}^{(k)}$ и $Y_{rq}^{(k)}$ – такие же как в (5.2.6).

При этом

$$B_{\Sigma q} = \sum_{r=1}^m B_{rq}. \tag{5.2.9}$$

В (5.2.4) $\hat{\sigma}_{cq}^2 = v_q^2 / 2E_q$ – дисперсия оценок $\hat{\mu}_{cq}^{(k)}$ и $\hat{\mu}_{sq}^{(k)}$.

Апостериорное распределение параметров сигнала. Найдем апостериорное распределение параметров сигнала в предположении марковских изменений μ_{cq} и μ_{sq} на соседних элементах. Полагая априорное распределение $W(\mu_{cq})$ равномерным, апостериорное распределение параметров сигнала в соответствии с формулой Байеса будет определяться выражением:

$$\begin{aligned}
& W_q^{(M)}(\mu_{cq}^{(N+1)}, \dots, \mu_{cq}^{(M)}) / Z'_{(N+1)q}, \dots, Z'_{Mq} = \\
& = \text{const} \mathfrak{F}_q^{(M)}(Z'_{(N+1)q}, \dots, Z'_{Mq} / \mu_{cq}) \prod_{k=N+1}^{M-1} W_q(\mu_{cq}^{(k+1)} / \mu_{cq}^{(k)}).
\end{aligned}
\tag{5.2.10}$$

Постоянный множитель в правой части (5.2.10) включает в себя и совместную плотность $W_q(\mathbf{Z}'_{(N+1)q}, \dots, \mathbf{Z}'_{Mq})$, не зависящую явно от μ_{cq} .

Апостериорную плотность вероятностей на M -том этапе наблюдения вычислим из (5.2.10) $(M-1)$ – кратным интегрированием по $\mu_{cq}^{(N+1)}, \dots, \mu_{cq}^{(M-1)}$:

$$W_q^{(M)}(\mu_{cq}^{(M)} / \mathbf{Z}'_{(N+1)q}, \dots, \mathbf{Z}'_{Mq}) = \int \dots \int W_q^{(M)}(\mu_{cq}^{(N+1)}, \dots, \mu_{cq}^{(M)} / \mathbf{Z}'_{(N+1)q}, \dots, \mathbf{Z}'_{Mq}) d\mu_{cq}^{(N+1)} \dots d\mu_{cq}^{(M-1)}. \quad (5.2.11)$$

При поступлении нового наблюдения $\mathbf{Z}'_{(M+1)q}$, плотность (5.2.11) преобразуется следующим образом:

$$W_q^{(M+1)}(\mu_{cq}^{(M+1)} / \mathbf{Z}'_{(N+1)q}, \dots, \mathbf{Z}'_{(M+1)q}) = \text{const} \mathcal{F}_q^{(M+1)}(\mathbf{Z}'_{(M+1)q} / \mu_{cq}^{(M+1)}) \times \\ \times \int W(\mu_{cq}^{(M+1)} / \mu_{cq}^{(M)}) W_q^{(M)}(\mu_{cq}^{(M)} / \mathbf{Z}'_{(N+1)q}, \dots, \mathbf{Z}'_{Mq}) d\mu_{cq}^{(M)}. \quad (5.2.12)$$

Это равенство является основным рекуррентным соотношением для апостериорной плотности вероятностей параметров сигнала. Рассмотрим для определенности случай гауссовых марковских изменений параметров канала. Известно, что в условиях высокой точности измерения параметров сигнала $(2\sigma_q^2 E_q / \nu_q^2 \gg 1)$, для практических целей достаточно ограничиться гауссовым приближением в (5.2.12). Подставим в (5.2.12) функционал отношения правдоподобия (5.2.4) и переходную плотность вероятностей в виде

$$W(\mu_{cq}^{(M+1)} / \mu_{cq}^{(M)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2(1-R_q^2)}} \exp \left[-\frac{(\mu_{cq}^{(M+1)} - \mu_{cq}^{(M)} R_q)^2}{2\sigma_q^2(1-R_q^2)} \right]. \quad (5.2.13)$$

После соответствующих преобразований получим апостериорное распределение на M -том этапе в форме:

$$W_q^{(M)}(\mu_{cq}^{(M)}, \mu_{sq}^{(M)} / \mathbf{Z}_M) = \frac{B_{\Sigma q}}{2\pi\sigma_{Mq}^2} \exp \left\{ -\frac{B_{\Sigma q}}{2\sigma_{Mq}^2} \left[\left(\mu_{cq} - \frac{m_{cq}^{(M)}}{B_{\Sigma q}} \right)^2 + \left(\mu_{sq} - \frac{m_{sq}^{(M)}}{B_{\Sigma q}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.2.14)$$

где

$$m_{cq}^{(M)} = \frac{m_{cq}^{(M-1)} \hat{\sigma}_{cq}^2 + \hat{\mu}_{cq}^{(M)} \left[\sigma_{(M-1)q}^2 R_q^2 + \sigma_q^2 (1 - R_q^2) \right]}{\hat{\sigma}_{cq}^2 + \sigma_{(M-1)q}^2 R_q^2 + \sigma_q^2 (1 - R_q^2)}, \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_{Mq}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{cq}^2 \left[\sigma_{(M-1)q}^2 R_q^2 + \sigma_q^2 (1 - R_q^2) \right]}{\hat{\sigma}_{cq}^2 + \sigma_{(M-1)q}^2 R_q^2 + \sigma_q^2 (1 - R_q^2)}. \quad (5.2.16)$$

Начальные условия:

$$m_{cq}^{(N+1)} = \hat{\mu}_{cq}^{(N+1)}, \quad \sigma_{(N+1)q}^2 = \hat{\sigma}_{cq}^2.$$

Из (5.2.15), (5.2.16) следуют частные случаи:

1. В каналах с неизменными параметрами сигнала ($R_q = 1$)

$$m_{cq}^{(M)} = \frac{1}{M - N} \sum_{k=N+1}^M \hat{\mu}_{cq}^{(k)}, \quad \sigma_{Mq}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{cq}^2}{M - N}, \quad (5.2.17)$$

По мере увеличения размера обучающей выборки качество оценок улучшается, стремясь к истинным значениям параметров.

2. В каналах с быстрыми изменениями параметров сигнала ($R_q \ll 1$)

$$m_{cq}^{(M)} = \frac{\hat{\mu}_{cq}^{(M)} \bar{h}_q^2}{1 + \bar{h}_q^2}, \quad \sigma_{Mq}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{cq}^2 \bar{h}_q^2}{1 + \bar{h}_q^2}, \quad (5.2.18)$$

или при $\bar{h}_q^2 \gg 1$

$$m_{cq}^{(M)} = \hat{\mu}_{cq}^{(M)}, \quad \sigma_{Mq}^2 = \hat{\sigma}_{cq}^2. \quad (5.2.19)$$

Отсюда видно, что при быстрых изменениях параметров, формирование оценок происходит независимо на каждом этапе наблюдения. Поэтому желательно формировать их на интервале решения.

Алгоритм приема при смешанном обучении по узкополосным помехам.

После подстановки в (5.2.2) апостериорных распределений (4.2.5) и (5.2.14) и интегрирования получим адаптивный алгоритм разнесенного приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 (B_{zq} + B_{rq} \frac{\sigma_{Mq}^2}{\hat{\sigma}_{cq}^2})} [2(m_{cq}^{(M)} X_{rq} + m_{sq}^{(M)} Y_{rq}) - (m_{cq}^{(M)2} + m_{sq}^{(M)2}) \frac{E_q B_{rq}}{B_{zq}} + \\ & + (X_{rq}^2 + Y_{rq}^2) \frac{\sigma_{Mq}^2}{E_q \hat{\sigma}_{cq}^2}] - \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 (B_{zq} + B_{lq} \frac{\sigma_{Mq}^2}{\hat{\sigma}_{cq}^2})} [2(m_{cq}^{(M)} X_{lq} + m_{sq}^{(M)} Y_{lq}) - \\ & - (m_{cq}^{(M)2} + m_{sq}^{(M)2}) \frac{E_q B_{lq}}{B_{zq}} + (X_{lq}^2 + Y_{lq}^2) \frac{\sigma_{Mq}^2}{E_q \hat{\sigma}_{cq}^2}] > \sum_{q=1}^Q \ln \frac{B_{zq} + B_{rq} \frac{\sigma_{Mq}^2}{\hat{\sigma}_{cq}^2}}{B_{zq} + B_{lq} \frac{\sigma_{Mq}^2}{\hat{\sigma}_{cq}^2}}, \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Реализация алгоритма (5.2.20) в общем случае весьма сложная, т. к. по мере увеличения объема наблюдаемых данных происходит изменение структуры устройства обработки сигналов. Из (5.2.20) следуют частные случаи. Так, для противоположных сигналов (5.2.20) преобразуется к виду

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2} (m_{cq}^{(M)} X_{lq} + m_{sq}^{(M)} Y_{lq}) > 0. \quad (5.2.21)$$

При $R_q = 1$ и $M - N \gg 1$ из (5.2.20) следует алгоритм

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 B_{zq}} [m_{cq} X_{rq} + m_{sq} Y_{rq} - (m_{cq}^2 + m_{sq}^2) \frac{E_q B_{rq}}{2B_{zq}}] > \\ & > \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 B_{zq}} [m_{cq} X_{lq} + m_{sq} Y_{lq} - (m_{cq}^2 + m_{sq}^2) \frac{E_q B_{lq}}{2B_{zq}}], \quad r \neq l \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

совпадающий с адаптивным алгоритмом разнесенного приема, построенном на принципе замены неизвестных параметров сигнала их оценками. Такой алгоритм гораздо проще, чем (5.2.20), т. к. его структура на всех этапах наблюдения остается неизменной, меняются только параметры блоков формирования оценок сигналов и узкополосных помех и пороговых уровней. При симметричном воздействии узкополосных помех на все варианты сигналов с активной паузой отпадает необходимость в формировании пороговых уровней, что упрощает решающее правило.

Из (5.2.22) как частный случай следует алгоритм приема двоичных сигналов с пассивной паузой при обучении по сигналу с помощью классифицированной выборки:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2} [(m_{cq} X_{1q} + m_{sq} Y_{1q}) - \frac{1}{2}(m_{cq}^2 + m_{sq}^2) E_q B_{1q}] > 0. \quad (5.2.23)$$

Нетрудно показать, что в полученных алгоритмах при работе в каналах с неизменными параметрами узкополосных помех по мере увеличения размера обучающей выборки помех происходит их полная компенсация. По мере увеличения объема обучающей выборки сигнала в каналах с неизменными параметрами, полученные алгоритмы сходятся в среднеквадратичном к алгоритмам когерентного разнесенного приема. Поэтому их можно назвать асимптотически оптимальными.

Алгоритм приема при самообучении по узкополосным помехам. Формирование оценок узкополосных помех с использованием классифицированных выборок помех усложняет алгоритм приема и в то же время в каналах с переменными параметрами помех не существенно влияет на помехоустойчивость, поэтому не всегда оправдано. В этих условиях представляют интерес алгоритмы, у которых ведется совместное формирование оценок сигнала и узкополосных помех при помощи неклассифицированных (по помехам) принятых реализаций на интервале MT . Такие алгоритмы следуют непосредственно из (5.2.20)–(5.2.23) если положить в них $N = 0$. Большой практический интерес представляют алгоритмы, построенные на принципе замены неизвестных параметров сигнала и узкополосных помех их оценками, сформированными совместно по неклассифицированной (по помехам) последовательности принятых реализаций на интервале $0-MT$ (при $N = 0$).

Повторяя для каждой ветви разнесения рассуждения, аналогичные приведенным в параграфе 3.2 при выводе формулы (3.2.31), адаптивный алгоритм разнесенного приема при совместном обучении по сигналу и по узкополосным помехам можно представить в форме (5.2.22) (при $N = 0$) или в следующем виде:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 E_q B_{rq}} [X_{rq} X'_{rq} + Y_{rq} Y'_{rq} - \frac{1}{2}(X'^2_{rq} + Y'^2_{rq})] >$$

$$> \sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2 E_q B_{lq}} [X_{lq} X'_{lq} + Y_{lq} Y'_{lq} - \frac{1}{2} (X_{lq}^2 + Y_{lq}^2)], \quad r \neq l. \quad (5.2.24)$$

В (5.2.24) обозначено

$$X'_{rq} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X_{rq}^{(k)} = m_{crq} E_q, \quad Y'_{rq} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M Y_{rq}^{(k)} = m_{srq} E_q, \quad (5.2.25)$$

где

$$m_{crq} = \frac{1}{M E_q} \sum_{k=1}^M [x_{kq}^{(r)} E_q - x_{kq}^{(\pi)} x_q^{(\pi r)} - y_{kq}^{(\pi)} y_q^{(\pi r)}],$$

$$m_{srq} = \frac{1}{M E_q} \sum_{k=1}^M [y_{kq}^{(r)} E_q + x_{kq}^{(\pi)} y_q^{(\pi r)} - y_{kq}^{(\pi)} x_q^{(\pi r)}]; \quad (5.2.26)$$

$x_{kq}^{(r)}$, $y_{kq}^{(r)}$ определяются выражениями (3.2.27) для каждой ветви разнесения;

$x_{kq}^{(\pi)}$, $y_{kq}^{(\pi)}$ определяются (3.2.28) с заменой индекса i на q ;

$x_q^{(\pi r)}$, $y_q^{(\pi r)}$ определяются (2.4.9) с заменой индекса i на q .

Ниже будет показано, что помехоустойчивость приема по правилу (5.2.24) не зависит от интенсивности узкополосных помех (при $\bar{h}_{\pi q}^2 \gg 1$) и скорости изменения их параметров, что является следствием использования неклассифицированной обучающей выборки помех.

Алгоритм приема при неразличимых структурах сигнала и узкополосных помех. Из (5.2.24) можно вывести алгоритм адаптивного разнесенного приема для случая неразличимых структур сигнала и узкополосных помех, т. е. при $\hat{Z}_{\pi q}(t) = \hat{Z}_{rq}(t) (g_{orq}^2 = 1)$. В частности, при релейских замираниях узкополосных помех, подставляя в (5.2.24) X_{rq} , Y_{rq} и X'_{rq} , Y'_{rq} в форме (5.2.6), (5.2.25) с учетом оценки $\hat{Z}_{\pi q}(t)$ в форме (4.2.11) и B_{rq} в виде $B_{rq} = 1/(1 + \bar{h}_{\pi q}^2)$, получим

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_{sq}^2} [m_{cq} x_{rq} + m_{sq} y_{rq} - (m_{cq}^2 + m_{sq}^2) \frac{E_q}{2}] >$$

$$> \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_{\Sigma q}^2} [m_{cq} x_{lq} + m_{sq} y_{lq} - (m_{cq}^2 + m_{sq}^2) \frac{E_q}{2}], \quad r \neq l. \quad (5.2.27)$$

Здесь x_{rq} и y_{rq} определяются формулами (4.2.32);

$v_{\Sigma q}^2$ определяется (4.2.33) или (4.2.34);

$$m_{cq} = \frac{1}{ME_q} \sum_{k=1}^M x_{rq}^{(k)}, \quad m_{sq} = \frac{1}{ME_q} \sum_{k=1}^M y_{rq}^{(k)} \quad (5.2.28)$$

– при обучении по классифицированной выборке сигнала;

$$m_{cq} = \frac{1}{ME_q} \sum_{k=1}^M \sum_{r=1}^m x_{rq}^{(k)}, \quad m_{sq} = \frac{1}{ME_q} \sum_{k=1}^M \sum_{r=1}^m y_{rq}^{(k)} \quad (5.2.29)$$

– при обучении по неклассифицированной выборке сигнала.

Алгоритм (5.2.27) целесообразно применять в тех случаях, когда вследствие особенностей воздействующих узкополосных помех невозможно использовать различные структуры сигнала и помех для повышения помехоустойчивости приема, либо оно не используется в целях более простого построения приемника. Из (5.2.27) видно, что высокая достоверность приема обеспечивается ветвями разнесения с малой суммарной спектральной плотностью помех. Ветви с очень мощными помехами отключаются, поэтому требуется избыточность по ветвям.

Алгоритм приема при стохастических сигналах и узкополосных помехах. Для полноты картины рассмотрим прием стохастического сигнала в условиях действия стохастических узкополосных помех, что соответствует случаю произвольных изменений параметров канала. Представим принятую смесь сигнала с помехами в q -й ветви разнесения в форме

$$\underline{Z}'_q(t) = \underline{Z}_{rq}(t) + \underline{Z}_{\pi q}(t) + \xi_q(t) = Y_{rq}(t) + \xi_q(t) = \text{Re}[\underline{Z}'_q(t)], \quad t \in T. \quad (5.2.30)$$

Принятый сигнал и узкополосная помеха имеют ограниченную энергию, т. е.

$$\int_T E[\underline{Z}_{rq}(t) + \underline{Z}_{\pi q}(t)]^2 dt < \infty, \quad (5.2.31)$$

где $E[\cdot]$ – знак математического ожидания.

Правило решения о приеме r -го сигнала определяется неравенством (5.2.1), где

$$\Lambda_{rl}^{(q)} = \frac{\Lambda_{r0}^{(q)}}{\Lambda_{l0}^{(q)}}. \quad (5.2.32)$$

В этом выражении $\Lambda_{r0}^{(q)}$ представляет собой отношение правдоподобия (производную Радона–Никодима) для r -го сигнала относительно наблюдаемого процесса без сигнала в q -й ветви. Используя концепцию порождающего (обновляющего) процесса [65, 103, 215, 216], отношение правдоподобия $\Lambda_{r0}^{(q)}$ можно представить в виде [148]:

$$\Lambda_{r0}^{(q)} = \exp\left\{\frac{1}{\nu^2} \int_T \mathcal{Z}'_q(t) [\hat{Y}_{rq}(t) - \hat{Z}'_{pq}(t)] dt - \frac{1}{2\nu^2} \int_T [\hat{Y}_{rq}^2(t) - \hat{Z}'_{pq}(t)^2] dt\right\}, \quad (5.2.33)$$

где

$\hat{Y}_{rq}(t) = \hat{Z}'_{rq}(t) + \hat{Z}'_{pq}(t)$ совместная оценка (в общем случае нелинейная) сигнала и узкополосной помехи по критерию минимума среднего квадрата ошибки, полученная из наблюдений $\mathcal{Z}'_q(t)$ (5.2.30) до текущего момента времени;

$\hat{Z}'_{pq}(t)$ – оценка узкополосной помехи по критерию минимума среднего квадрата ошибки полученная из наблюдаемого процесса $\mathcal{Z}'_q(t)$ при отсутствии сигнала.

В (5.2.33) первый интеграл является стохастическим интегралом в смысле Ито, второй интеграл – обычный. Для гауссовых процессов оба интеграла в (5.2.33) обычные. Отношение правдоподобия в форме (5.2.33) можно получить как следствие теоремы 7.13 из [103], согласно которой условное математическое ожидание может быть «перенесено» под знак интеграла.

В соответствии с (5.2.33) при условии $\hat{Z}'_{pq}(t) = \text{const}(r)$ отношение правдоподобия $\Lambda_{rl}^{(q)}$ (5.2.32) можно записать следующим образом

$$\Lambda_{rl}^{(q)} = \frac{\exp\left\{\frac{1}{\nu^2} \left[\int_T \mathcal{Z}'_q(t) \hat{Y}_{rq}(t) dt - \frac{1}{2} \int_T \hat{Y}_{rq}^2(t) dt \right]\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{\nu^2} \left[\int_T \mathcal{Z}'_q(t) \hat{Y}_{lq}(t) dt - \frac{1}{2} \int_T \hat{Y}_{lq}^2(t) dt \right]\right\}}. \quad (5.2.34)$$

Оптимальным в рассматриваемых условиях является прием в целом всей переданной информационной последовательности. При этом алгоритм приема определяется неравенством (5.2.1), в котором $\Lambda_{rl}^{(q)}$ есть (5.2.34). Причем под T

подразумевается интервал наблюдения переданной информационной последовательности, на котором принимается решение. Как известно, алгоритмы приема в целом очень сложны в реализации. Поэтому представляют интерес субоптимальные алгоритмы последовательной поэлементной процедуры принятия решений с фиксированной задержкой [14, 78]. Такой приемник должен содержать в каждой ветви блок формирования отношения правдоподобия (5.2.34), блок совместной оценки сигнала и узкополосной помехи, а также нелинейный процессор, построенный, например, по алгоритму Витерби [199].

Рассмотрим формирование совместной оценки сигнала и узкополосной помехи $\hat{\mathbf{Y}}_{rq}(t)$, используя методы уравнений состояния [146] совместно с методами динамической адаптации [207]. Запишем $\mathbf{Y}_{rq}(t)$ в виде

$$\mathbf{Y}_{rq}(t) = \text{Re} \left[\underline{\mathbf{Z}}_q(t) \underline{\mathcal{M}}_q(t) \right], \quad (5.2.35)$$

где $\underline{\mathbf{Z}}_q(t) = [\underline{Z}_r(t) \quad \vdots \quad \underline{Z}_{pq}(t)]$ – модуляционная матрица (напомним, что $\underline{Z}_r(t)$ и $\underline{Z}_{pq}(t)$ – детерминированные функции);

$$\underline{\mathcal{M}}_q(t) = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{M}}_r(t) \\ \text{-----} \\ \underline{\mathcal{M}}_{pq}(t) \end{bmatrix} \text{ – вектор состояния, генерируемый динамической сис-}$$

темой, которая описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\underline{\mathcal{M}}_q(t)}{dt} = \mathbf{F} \left[\underline{\mathcal{M}}_q(t); t \right] + \underline{\mathbf{G}}(t) \underline{\mathbf{v}}(t). \quad (5.2.36)$$

Здесь $\mathbf{F} \left[\underline{\mathcal{M}}_q(t); t \right]$ – в общем случае нелинейная матричная функция. В частном случае гауссового сигнала и узкополосных помех уравнение (5.2.36) имеет вид

$$\frac{d\underline{\mathcal{M}}_q(t)}{dt} = \underline{\mathbf{F}}_q(t) \underline{\mathcal{M}}_q(t) + \underline{\mathbf{G}}(t) \underline{\mathbf{v}}(t), \quad (5.2.37)$$

где

$$\underline{\mathbf{F}}_q(t) = \begin{bmatrix} \underline{F}_c(t) & | & 0 \\ \text{-----} & | & \text{-----} \\ 0 & | & \underline{F}_{pq}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{G}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{G}_c(t) & | & 0 \\ \text{-----} & | & \text{-----} \\ 0 & | & \underline{G}_p(t) \end{bmatrix} \quad (5.2.38)$$

– матрицы, элементы которых в общем случае являются непрерывными функциями времени;

$\underline{\mathbf{v}}(t)$ – гауссов случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $E[\underline{\mathbf{v}}(t)\underline{\mathbf{v}}^T(r)] = \theta\delta(t-r)$.

Оценку $\hat{\mathbf{Y}}_{rq}(t)$ будем определять в форме

$$\hat{\mathbf{Y}}_{rq}(t) = \text{Re}[\underline{\mathbf{Z}}_q(t)\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)]. \quad (5.2.39)$$

Ограничимся здесь случаем линейных оценок. Критерием качества оценки $\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)$ является минимум функционала

$$\mathfrak{J}[\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)] = E\{[\underline{\mathcal{M}}_q(t) - \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)]^+ [\underline{\mathcal{M}}_q(t) - \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)]\} = E\{L(\underline{\mathcal{M}}_q, \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q)\}. \quad (5.2.40)$$

Минимум функционала (5.2.40) достигается на траектории $\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)$, определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)}{dt} = \underline{\mathbf{F}}_q(t)\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t) + \underline{\mathbf{K}}_q(t)[\underline{\mathbf{Z}}'_q(t) - \underline{\mathbf{Z}}_q(t)\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)], \quad (5.2.41)$$

где $\underline{\mathbf{K}}_q(t) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t)\underline{\mathbf{Z}}_q^+(t)/v_q^2$ – оптимальный коэффициент усиления;

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t)$ – матрица ошибок фильтрации.

В большинстве случаев динамическая система, генерирующая вектор состояния $\underline{\mathcal{M}}_q(t)$ задана не полностью. Уравнение (5.2.37) задано с точностью до вектора параметров \mathbf{v}_q , следовательно, решение уравнения траектории (5.2.41) зависит от вектора неизвестных параметров \mathbf{v}_q . Поэтому оценка $\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)$ должна определяться одновременно с оценкой параметров \mathbf{v}_q .

Функционал (5.2.40) вектора $\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)$ можно рассматривать и как функционал вектора \mathbf{v}_q :

$$\mathfrak{J}(\mathbf{v}_q, t) = E\{L(\underline{\mathcal{M}}_q(t), \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(\mathbf{v}_q, t))\}. \quad (5.2.42)$$

Условию оптимальности соответствует равенство нулю градиента функционала (5.2.42) по вектору \mathbf{v}_q :

$$\nabla_{\mathbf{v}_q} \mathfrak{J}(\mathbf{v}_q, t) = 0$$

или

$$E\left\{\left(\frac{\partial \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(t)}{\partial \mathbf{v}_q}\right)^+ \nabla_{\hat{\underline{\mathcal{M}}}_q} L[\underline{\mathcal{M}}_q(t), \hat{\underline{\mathcal{M}}}_q(\mathbf{v}_q, t)]\right\} = 0. \quad (5.2.43)$$

Из условия (5.2.43) следует алгоритм адаптации относительно вектора \mathbf{B}_q [207]:

$$\frac{d\mathbf{B}_q(t)}{dt} = -\Gamma_\epsilon(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q(t)}{\partial \mathbf{B}_q} \right)^+ \left\{ \nabla_{\hat{\mu}} L[\underline{\mathcal{M}}_q(t), \hat{\mathcal{M}}_q(\mathbf{B}_q, t)] \right\}. \quad (5.2.44)$$

В действительности сигнал и узкополосная помеха наблюдаются в шумах (5.2.30). Поэтому, учитывая, что градиент функционала $E\{L[\underline{\mathcal{M}}(t), \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{B}, t)]\}$ равен градиенту функционала $E\{L[\underline{\mathbf{Z}}'(t), \underline{\mathbf{Z}}(t), \hat{\mathcal{M}}(t)]\}$ из (5.2.44) получим алгоритм

$$\frac{d\mathbf{B}_q(t)}{dt} = \Gamma_\epsilon(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q} \right)^+ \underline{\mathbf{Z}}_q^+(t) [\underline{\mathbf{Z}}_q'(t) - \underline{\mathbf{Z}}_q(t) \hat{\mathcal{M}}_q(t)]. \quad (5.2.45)$$

Здесь $\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q}$ – матрица чувствительности решений уравнения траектории (5.2.41) по компонентам вектора \mathbf{B}_q .

После вычисления полной производной оценки $\hat{\mathcal{M}}_q(t)$

$$\frac{d\hat{\mathcal{M}}_q(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q(t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q(\mathbf{B}_q, t)}{\partial \mathbf{B}_q} \cdot \frac{d\mathbf{B}_q(t)}{dt} \quad (5.2.46)$$

с учетом (5.2.41), (5.2.45) алгоритмы динамической адаптации примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathcal{M}}_q(t)}{dt} &= \underline{\mathbf{F}}_q(t) \hat{\mathcal{M}}_q(t) + [\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t) \underline{\mathbf{Z}}_q^+(t) \frac{1}{v_q^2} + \\ &+ \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q} \Gamma_\epsilon(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q} \right)^+ \underline{\mathbf{Z}}_q^+(t)] [\underline{\mathbf{Z}}_q'(t) - \underline{\mathbf{Z}}_q(t) \hat{\mathcal{M}}_q(t)]; \quad (5.2.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t)}{dt} &= \underline{\mathbf{F}}_q(t) \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t) \underline{\mathbf{F}}_q^+(t) - [\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t) \underline{\mathbf{Z}}_q^+(t) \frac{1}{v_q^2} + \\ &+ \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q} \Gamma_\epsilon(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}_q}{\partial \mathbf{B}_q} \right)^+ \underline{\mathbf{Z}}_q^+(t)] \underline{\mathbf{Z}}_q(t) \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_q(t) + \underline{\mathbf{G}}(t) \underline{\boldsymbol{\theta}} \underline{\mathbf{G}}^T(t); \quad (5.2.48) \end{aligned}$$

С течением времени элементы матрицы $\Gamma_e(t)$ стремятся к нулю, при выполнении условий Роббинса–Монро, поэтому уравнения (5.2.47), (5.2.48) приближаются к соответствующим уравнениям оценки и дисперсии ошибок фильтра Калмана–Бьюси.

Таким образом, адаптивный приемник должен содержать блок формирования отношения правдоподобия и блок совместной оценки сигнала и узкополосной помехи из наблюдаемой реализации, а в случае поэлементного приема с фиксированной задержкой решения, и нелинейный процессор, построенный, например, по алгоритму Витерби [199]. Причем, алгоритм формирования отношения правдоподобия (но не оценок) инвариантен к статистике сигналов и помех. В условиях неполной априорной информации о сигналах и помехах формирование их оценок осуществляется одновременно с идентификацией неизвестных параметров с помощью метода уравнений состояния в сочетании с методами динамической адаптации при помощи цифровых вычислителей для моделирования уравнений (5.2.47), (5.2.48), (5.2.45). Отсюда видно различие в построении приемника на основании стохастической модели по сравнению с квазидетерминированной.

5.3. Помехоустойчивость адаптивного разнесенного приема при совместном обучении по сигналу и по узкополосным помехам

Проведем анализ помехоустойчивости приема двоичных сигналов по правилу (5.2.22), построенному на принципе замены неизвестных параметров сигнала и узкополосных помех их совместными оценками, сформированными при помощи неклассифицированной (по помехам) последовательности принятых реализаций на интервале MT (при $N = 0$), в условиях конечной скорости изменения параметров канала. Рассмотрим помехоустойчивость приема противоположных и ортогональных в усиленном смысле сигналов с одинаковой энергией.

Противоположные сигналы. Алгоритм приема противоположных сигналов определяется неравенством (5.2.21). С учетом, обозначений (5.2.25) запишем его в виде

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2} [X_{1q} X'_q + Y_{1q} Y'_q] > 0. \quad (5.3.1)$$

Здесь в соответствии с (5.2.26)

$$\begin{aligned} X'_q &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [x_{qk}^{(1)} E_q - x_{qk}^{(n)} x_q^{(n1)} - y_{qk}^{(n)} y_q^{(n1)}], \\ Y'_q &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [y_{qk}^{(1)} E_q + x_{qk}^{(n)} y_q^{(n1)} - y_{qk}^{(n)} x_q^{(n1)}]. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Входящие в (5.3.2) составляющие определяется выражениями (2.4.9), (3.2.27), (3.2.28) при замене i на q . Эти величины, сформированные на интер-

вале $0-MT$, используются для приема $(M+1)$ -го элемента сигнала, поэтому

$$\begin{aligned} X_{1q} &= x_q^{(1)} - \frac{1}{E_{\pi q}} (x_q^{(\pi)} x_q^{(\pi 1)} + y_q^{(\pi)} y_q^{(\pi 1)}), \\ Y_{1q} &= y_q^{(1)} + \frac{1}{E_{\pi q}} (x_q^{(\pi)} y_q^{(\pi 1)} - y_q^{(\pi)} x_q^{(\pi 1)}), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

где $x_q^{(1)}(t)$ и $x_q^{(\pi)}(t)$ аналогичны (3.3.3) и (3.3.4) в каждой ветви.

При независимых релейских замираниях сигналов в ветвях разнесения, левая часть неравенства (5.3.1) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Величины X'_q и Y'_q , X_{1q} и Y_{1q} попарно-независимы с матрицей ковариаций

$$\mathbf{K}_q = \frac{1}{v_q^2} \begin{bmatrix} \overline{X_{1q}'^2} & \overline{X_{1q}' X_q'} \\ \overline{X_{1q}' X_q'} & \overline{X_q'^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{v_q^2} \begin{bmatrix} \overline{Y_{1q}'^2} & \overline{Y_{1q}' Y_q'} \\ \overline{Y_{1q}' Y_q'} & \overline{Y_q'^2} \end{bmatrix}. \quad (5.3.4)$$

Плотность вероятности квадратичной формы определяется соотношениями (4.5.9), где γ_q и β_q являются положительными значениями и модулями отрицательных значений собственных чисел матрицы $[\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q]$. Здесь $\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Вероятность ошибки найдем как вероятность невыполнения неравенства (5.3.1) при передаче первого варианта сигнала

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{a}^{(1)}) d\mathbf{a}^{(1)} = \sum_{q=1}^Q \frac{\beta_q^{2Q-1}}{\prod_{k=1}^Q (\beta_q + \gamma_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q (\beta_q - \beta_k)}. \quad (5.3.5)$$

При соизмеримых β_q и β_k в условиях $\overline{h_q^2} \gg 1$ удобно использовать соотношение

$$p \approx C_{2Q-1}^Q \prod_{q=1}^Q p_q = C_{2Q-1}^Q \prod_{q=1}^Q \frac{\beta_q}{\gamma_q + \beta_q}. \quad (5.3.6)$$

После соответствующих преобразований вероятность ошибки при адаптивном разнесенном приеме противоположных сигналов будет определяться формулой

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left\{ 1 - \frac{\overline{h_q^2} r_{3q} (1 - g_{0q}^2)}{\sqrt{[\overline{h_q^2} r_{1q} (1 - g_{0q}^2) + \frac{1}{M}] [\overline{h_q^2} r_{2q} (1 - g_{0q}^2) + 1]}} \right\} \quad (5.3.7)$$

где $\overline{h_q^2} = \frac{\mu_q^2}{\nu_q^2} E_q$; g_{0q}^2 определяется (4.2.14);

r_{1q}, r_{2q}, r_{3q} определяются (3.4.9), в частности, при гауссовой аппроксимации $R_q(t_1, t_2) = \exp[-\frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_k^2}]$, при условии $T \ll \tau_k$, они равны

$$\begin{aligned} r_{1q} &= 1 - \frac{(MT)^2}{12\tau_k^2}, & r_{2q} &= 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2}, \\ r_{3q} &= 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2} (2M^2 + 3M + 2). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Здесь τ_k – интервал корреляции (средний период замираний) сигнала.

Формула (5.3.7) показывает, что в общем случае вероятность ошибки зависит от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума ($\overline{h_q^2}$), от размера обучающей выборки (M), от коэффициентов, характеризующих скорость изменения параметров сигнала (r_{1q}, r_{2q}, r_{3q}), и от коэффициентов различимости сигнала и узкополосной помехи в частотно-временной области (g_{0q}^2). Как видим, вероятность ошибки не зависит от интенсивности узкополосных помех (при больших $\overline{h_{pq}^2}$) и скорости изменения их параметров, что является следствием использования неклассифицированной обучающей выборки помех. В этом достоинство рассматриваемого алгоритма. Достигается оно вследствие избыточности сигнала по базе. Здесь величина коэффициента различимости g_{0q}^2 должна быть меньше единицы ($g_{0q}^2 < 1$), чтобы не было перекрытия всех составляющих сигнала мощными узкополосными помехами (при поражении всех ветвей разнесения узкополосными помехами).

Для иллюстрации на рис. 5.3.1 приведены зависимости вероятности ошибки от размера обучающей выборки M при разных $Q = m$, вычисленные по формуле (5.3.7) (сплошные линии). Кривые рассчитаны при $\overline{h_q^2} = \overline{h^2} / Q = \text{const}(q)$; $\overline{h^2} = 10^2$; $g_{0q}^2 = 0,5$ в предположении гауссовой аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$,

при $T/\tau_k = 10^{-2}$.

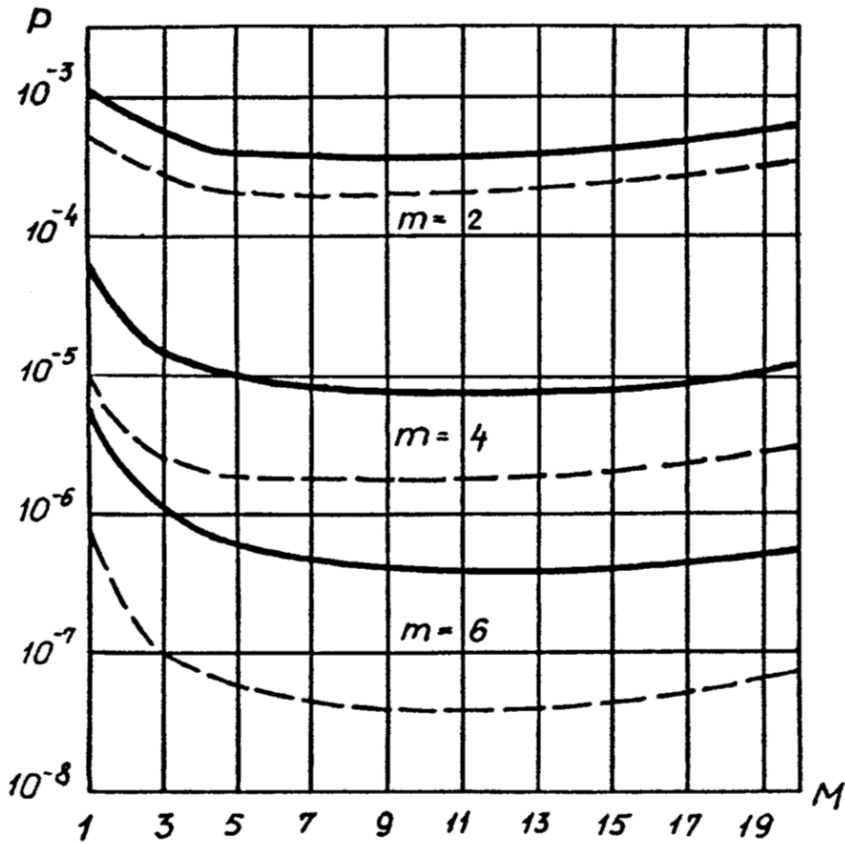


Рис. 5.3.1. Зависимость вероятности ошибок от размера обучающей выборки

Из приведенных кривых видно, что с увеличением размера обучающей выборки M повышение помехоустойчивости приема происходит более эффективно при большем числе ветвей разнесения. Видно также, что увеличение M сверх определенного значения нецелесообразно, т. к. вследствие декорреляции измеренных параметров сигнала при конечной скорости их изменений вероятность ошибки при больших значениях M может увеличиваться. Это увеличение обусловлено тем, что рассматривается помехоустойчивость приемника, построенного оптимально для сигналов с неизменными параметрами, а в действительности принимается сигнал с изменяющимися параметрами. При $Q = 4-6$ оптимальное значение $M \approx 10$. Из (5.3.7) видно, что в каналах с конечной скоростью изменения параметров сигнала при неограниченном увеличении вели-

чины $\overline{h_q^2}$ вероятность ошибки стремится не к нулю, а к предельному значению

$$P_{np} \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left(1 - \frac{r_{3q}}{\sqrt{r_{1q}r_{2q}}}\right). \quad (5.3.9)$$

Предельная вероятность ошибки равна нулю только в каналах с неизменными параметрами сигнала ($r_{1q} = r_{2q} = r_{3q} = 1$). При этом формула (5.3.7) преобразуется к виду

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left[1 - \frac{\overline{h_q^2}(1 - g_{0q}^2)}{\sqrt{[\overline{h_q^2}(1 - g_{0q}^2) + \frac{1}{M}][\overline{h_q^2}(1 - g_{0q}^2) + 1]}} \right], \quad (5.3.10)$$

При $g_{0q}^2 = 0$ (отсутствие узкополосных помех) полученное выражение в зависимости от объема обучающей выборки M переходит в соотношение, характеризующее помехоустойчивость когерентного разнесенного приема замиряющих по релеевскому закону сигналов с фазовой манипуляцией (при $M \gg 1$) и некогерентного разнесенного приема сигналов с относительной фазовой манипуляцией (при $M = 1$) в каналах с белым шумом. В условиях воздействия узкополосных помех предельный энергетический выигрыш при $M \gg 1$ по сравнению с $M = 1$, как и в каналах только с флуктуационным шумом, составляет 2^Q .

Формула (5.3.7) выведена для случая достаточно больших значений $\overline{h_{\pi q}^2}$.

Обобщением этой формулы на случай произвольных значений $\overline{h_{\pi q}^2}$ является следующее соотношение:

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left\{ 1 - \frac{\overline{h_q^2} r_{3q} \left(1 - \frac{g_{0q}^2 \overline{h_{\pi q}^2}}{1 + \overline{h_{\pi q}^2}}\right)}{\sqrt{[\overline{h_q^2} r_{1q} \left(1 - \frac{g_{0q}^2 \overline{h_{\pi q}^2}}{1 + \overline{h_{\pi q}^2}}\right) + \frac{1}{M}][1 + \overline{h_q^2} r_{2q} \left(1 - \frac{g_{0q}^2 \overline{h_{\pi q}^2}}{1 + \overline{h_{\pi q}^2}}\right)]}} \right\}. \quad (5.3.11)$$

Из него при $\overline{h_{\pi q}^2} \gg 1$ следует (5.3.7). В условиях неразличимых структур сигнала и узкополосных помех ($g_{0q}^2 = 1$), т. е. при работе по правилу (5.2.27), при произвольных $\overline{h_{\pi q}^2}$ вероятность ошибки определяется выражением

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left[1 - \frac{\overline{H}_q^2 r_{3q}}{\sqrt{(\overline{H}_q^2 r_{1q} + \frac{1}{M})(\overline{H}_q^2 r_{2q} + 1)}} \right], \quad (5.3.12)$$

где $\overline{H}_q^2 = \frac{\overline{h}_q^2}{1 + \overline{h}_{pq}^2}$. Ветви, в которых $g_{0q}^2 = 1$ и $\overline{h}_{pq}^2 \gg 1$, выключаются и в

приеме не участвуют, тогда под Q в (5.3.12) подразумевается число работающих ветвей разнесения, т. е. ветвей с малой интенсивностью помех. В условиях логарифмически-нормального изменения интенсивности узкополосных помех вероятность ошибки имеет характер кривых, приведенных на рис. 4.4.1–4.4.7.

Ортогональные в усиленном смысле сигналы. Алгоритм приема в общем случае определяется неравенством (5.2.24). Рассмотрим отдельно помехоустойчивость приема при селективных замираниях различных позиций сигналов и при общих замираниях сигналов в каждой ветви разнесения. Вначале рассмотрим случай селективных замираний. Селективные замирания могут наблюдаться у сигналов с неперекрывающимися спектрами. Осуществить отдельный прием селективно замирающих сигналов возможно располагая классифицированными (идеально или реально) обучающими выборками сигналов различных позиций в каждой ветви разнесения. Реально классифицированные обучающие выборки сигналов можно сформировать, например, путем использования обратной связи по решению в приемнике. В интервал обучения при этом не должен входить элемент сигнала, на котором принимается решение, в данный момент, т. к. еще не принято решение о том, какой сигнал передавался в этом элементе.

Алгоритм приема применительно к двоичным сигналам запишем в виде:

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 B_{1q}} [X_{1q} X'_{1q} + Y_{1q} Y'_{1q} - \frac{1}{2} (X_{1q}^2 + Y_{1q}^2)] - \quad (5.3.13)$$

$$- \sum_{q=1}^Q \frac{1}{v_q^2 B_{2q}} [X_{2q} X'_{2q} + Y_{2q} Y'_{2q} - \frac{1}{2} (X_{2q}^2 + Y_{2q}^2)] > 0,$$

где X'_{rq} , Y'_{rq} и X_{rq} , Y_{rq} ($r = 1, 2$) определяются выражениями (5.3.2), (5.3.3) с соответствующими индексами. Далее будем полагать, что узкополосные помехи действуют независимо на каждый вариант сигнала в различных ветвях.

При независимых по ветвям релейских замираниях сигналов, левая часть неравенства (5.3.13) является квадратичной формой нормальных случайных величин с нулевым средним и матрицей ковариаций \mathbf{K} , которую можно представить в блочно-диагональном виде с блоками \mathbf{K}_{1q} и \mathbf{K}_{2q} . Причем

$$\mathbf{K}_{1q} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11q} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22q} \end{array} \right] \quad (5.3.14)$$

где

$$\mathbf{K}_{11q} = \frac{1}{v_q^2} \left[\begin{array}{c|c} \overline{X'_{1q} X'_{1q}} & \overline{X'_{1q} X_{1q}} \\ \hline \overline{X'_{1q} X_{1q}} & \overline{X_{1q} X_{1q}} \end{array} \right], \quad \mathbf{K}_{22q} = \frac{1}{v_q^2} \left[\begin{array}{c|c} \overline{X'_{2q} X'_{2q}} & \overline{X'_{2q} X_{2q}} \\ \hline \overline{X'_{2q} X_{2q}} & \overline{X_{2q} X_{2q}} \end{array} \right].$$

Структура блока \mathbf{K}_{2q} аналогична для составляющих Y'_{rq}, Y_{rq} ($r = 1, 2$).

Элементы матрицы (5.3.14) аналогичны (3.4.17), (3.4.18) в каждой ветви.

Матрицу преобразований квадратичной формы можно представить в блочно-диагональном виде с блоками

$$\mathbf{J}_{1q} = \mathbf{J}_{2q} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{J}_{11q} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{J}_{22q} \end{array} \right], \quad (5.3.15)$$

где

$$\mathbf{J}_{11q} = \frac{1}{2B_{1q}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{22q} = \frac{1}{2B_{2q}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Плотность вероятности квадратичной формы определяется соотношениями (4.5.9), поэтому вероятность ошибки, как вероятность невыполнения неравенства (5.3.13) при передаче первого варианта сигнала, будет равна

$$P = \sum_{q=1}^{2Q} \frac{\beta_q^{4Q-1}}{\prod_{k=1}^{2Q} (\beta_q + \gamma_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{2Q} (\beta_q - \beta_k)} \approx C_{4Q-1}^{2Q} \prod_{q=1}^Q P_q, \quad (5.3.16)$$

$$\text{где } P_q = \frac{\beta_{1q}}{\gamma_{1q} + \beta_{1q}} \cdot \frac{\beta_{2q}}{\gamma_{2q} + \beta_{2q}}.$$

Здесь γ_{rq} и β_{rq} ($r = 1, 2$) положительные значения и модули отрицательных значений собственных чисел матрицы $[\mathbf{K}_{1q} \mathbf{J}_{1q}]$. После решения характеристического уравнения $[\mathbf{K}_{1q} \mathbf{J}_{1q} - \lambda \mathbf{I}] = 0$ для матриц (5.3.14), (5.3.15) и подстановки результата в (5.3.16) получим следующее выражение для вероятности ошибки при раздельном приеме селективно замирающих ортогональных сигналов

$$\begin{aligned}
p \approx & \frac{C_{4Q-1}^{2Q}}{4} \prod_{q=1}^Q \left\{ 1 - \left[1 + 4 \frac{[\overline{h}_q^2 r_{1q}(1-g_{01q}^2) + \frac{1}{M}][\overline{h}_q^2 r_{2q}(1-g_{01q}^2) + 1] - [\overline{h}_q^2 r_{3q}(1-g_{01q}^2)]^2}{[\overline{h}_q^2(2r_{3q} - r_{1q})(1-g_{01q}^2) - \frac{1}{M}]^2} \right]^{1/2} \right\} \times \\
& \times \left\{ 1 - \left[1 + 4 \frac{[\overline{h}_q^2 r_{1q}(1-g_{02q}^2)^2 + \frac{1-g_{02q}^2}{M}][\overline{h}_q^2 r_{2q}g_{02q}^4 + 1 - g_{02q}^2] - [\overline{h}_q^2 r_{3q}g_{02q}^2(1-g_{02q}^2)]^2}{[\overline{h}_q^2 r_{1q}(1-g_{02q}^2)^2 + \frac{1-g_{02q}^2}{M} + 2\overline{h}_q^2 r_{3q}g_{02q}^2(1-g_{02q}^2)]^2} \right]^{1/2} \right\}.
\end{aligned}
\tag{5.3.18}$$

Из (5.3.18) видно, что в условиях селективных замираний различных вариантов ортогональных сигналов в каждой ветви разнесения вероятность ошибочного приема зависит также, как и в (5.3.7) от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума, от размера обучающей выборки и от коэффициентов, характеризующих скорость изменения параметров сигнала. Однако зависимость вероятности ошибки от коэффициента различимости сигнала и узкополосных помех в частотно-временной области (g_{02q}^2) здесь имеет несколько иной характер вследствие использования факта селективности замираний различных вариантов сигналов, что обуславливает более высокую помехоустойчивость приема ортогональных сигналов в этих условиях. На рис. 5.3.1 это иллюстрируется штриховыми зависимостями $p = f(M)$ при разных $m = 2Q$, вычисленными по формуле (5.3.18) при $\overline{h}^2 = 100$; $\overline{h}_q^2 = \overline{h}^2/Q$; $g_{01q}^2 = g_{02q}^2 = 0,5$ и $T/\tau_k = 10^{-2}$, при гауссовой аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$. При отсутствии узкополосных помех, а также в условиях действия в отдельных ветвях разнесения помех с неразличимой по сравнению с сигналом структурой в частотно-временной области, помехоустойчивость приема противоположных сигналов всегда оказывается более высокой.

Из (5.3.18) как частный случай следует формула для вероятности ошибки в условиях действия в отдельных ветвях разнесения мощных помех ($\overline{h}_{\pi q}^2 \gg 1$) с неразличимой по сравнению с сигналом структурой ($g_{02q}^2 = 1$), которые приводят к выключению этих ветвей. Тогда в (5.3.18) под Q подразумевается число работающих ветвей разнесения, оставшихся после выключения части пораженных узкополосными помехами.

Далее рассмотрим помехоустойчивость адаптивного приема при общих замираниях сигналов различных позиций в каждой ветви разнесения. Ради простоты ограничимся случаем симметричного воздействия узкополосных помех

на оба варианта сигнала ($g_{01q}^2 = g_{02q}^2 = g_{0q}^2$). Проведем анализ помехоустойчивости при использовании неклассифицированной обучающей выборки сигнала в виде суммы всех входных воздействий, при этом

$$X'_q = X'_{1q} + X'_{2q}, \quad Y'_q = Y'_{1q} + Y'_{2q}. \quad (5.3.19)$$

В интервал оценки будем включать и элемент сигнала, на котором принимается решение в данный момент, поскольку используется неклассифицированная обучающая выборка сигнала. В этих условиях алгоритм (5.2.24) преобразуется к виду

$$\sum_{q=1}^Q \frac{1}{V_q^2} [X'_q (X_{1q} - X_{2q}) + Y'_q (Y_{1q} - Y_{2q})] > 0, \quad (5.3.20)$$

где

$$X_{1q} - X_{2q} = \frac{E_q}{T} \int_{(M-1)T}^{MT} \mu_{cq}(t) dt + \int_{(M-1)T}^{MT} \xi_q(t) [\tilde{Z}_1(t) - \tilde{Z}_2(t)] dt, \quad (5.3.21)$$

$$Y_{1q} - Y_{2q} = \frac{E_q}{T} \int_{(M-1)T}^{MT} \mu_{sq}(t) dt + \int_{(M-1)T}^{MT} \xi_q(t) [\tilde{Z}_1(t) - \tilde{Z}_2(t)] dt$$

– при передаче сигнала $\tilde{Z}_1(t)$.

При релейских замираниях сигналов левая часть неравенства (5.3.20) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Вероятность ошибки найдем как вероятность невыполнения этого неравенства при передаче первого сигнала. Она будет определяться формулами (5.3.5), (5.3.6) в которых $\gamma_q = \lambda_{1q}$, $\beta_q = -\lambda_{2q}$, λ_{1q} и λ_{2q} – собственные числа матрицы $[\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q]$. В данном случае

$$\mathbf{K}_q = \frac{1}{V_q^2} \begin{bmatrix} \overline{X_q'^2} & \overline{X'_q (X_{1q} - X_{2q})} \\ \overline{X'_q (X_{1q} - X_{2q})} & \overline{(X_{1q} - X_{2q})^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.22)$$

Решая характеристическое уравнение $[\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q - \lambda_q \mathbf{I}] = 0$ для матриц (5.3.22) и подставляя результат в (5.3.6), получим следующую формулу для вероятности ошибки

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left\{ 1 - \frac{\overline{h_q^2 r_{3q}} \sqrt{1 - 2g_{0q}^2}}{\sqrt{[\overline{h_q^2 r_{1q}} (1 - 2g_{0q}^2) + \frac{2}{M}][\overline{h_q^2 r_{2q}} + 2]}} \right\}, \quad (5.3.23)$$

где r_{1q}, r_{2q}, r_{3q} определяются выражениями (3.4.32).

Как видим из (5.3.23), в этом случае должна быть большая избыточность сигнала по базе ($g_{0q}^2 < 0,5$), чем в предыдущем (при поражении всех ветвей разнесения узкополосными помехами). При $g_{0q}^2 = 0$ выражение (5.3.23) совпадает с формулой для вероятности ошибки приемника с измерением параметров сигнала в каналах с белым шумом [4]. При конечной скорости изменения параметров сигнала предельная вероятность ошибки (при $\overline{h_q^2} \rightarrow \infty$) не равна нулю, а определяется формулой (5.3.9). Предельная вероятность ошибки равна нулю только при $M = 1$, т. е. при некогерентном приеме. В каналах с неизменными параметрами сигнала ($r_{1q} = r_{2q} = r_{3q} = 1$) вероятность ошибки определяется выражением

$$p \approx \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left[1 - \frac{\overline{h_q^2} \sqrt{1 - 2g_{0q}^2}}{\sqrt{[\overline{h_q^2} (1 - 2g_{0q}^2) + \frac{2}{M}][\overline{h_q^2} + 2]}} \right]. \quad (5.3.24)$$

При $M(1 - 2g_{0q}^2) \gg 1$ (5.3.24) переходит в формулу, характеризующую помехоустойчивость когерентного разнесенного приема. При $M = 1$ из (5.3.24) как частный случай следует выражение для вероятности ошибки при некогерентном разнесенном приеме в каналах с узкополосными помехами [144, п. 4.10]

$$p = \frac{C_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left\{ 1 - \left[\left(1 + \frac{2}{\overline{h_q^2}} \right) \left(1 + \frac{2}{\overline{h_q^2} (1 - 2g_{0q}^2)} \right) \right]^{-1/2} \right\}, \quad (5.3.25)$$

которое при $g_{0q}^2 = 0$ переходит в известное соотношение для вероятности ошибки при некогерентном разнесенном приеме в каналах с белым шумом.

5.4. Адаптивный прием по параллельным каналам при неполной разделимости сигналов

До сих пор рассматривался прием в условиях полного разделения сигналов в параллельных каналах. В некоторых случаях, например в многолучевых каналах, может не быть полного разделения сигналов различных каналов. Поэтому рассмотрение этого случая представляет практический интерес.

Принятая смесь сигнала с помехами на входе приемника представляет собой совокупность реализаций вида

$$\underline{Z}'(t) = \{ \underline{Z}'_q(t) \}_{q=1, \dots, Q}, \quad t \in T. \quad (5.4.1)$$

Здесь $\tilde{Z}'_q(t)$ определяется (4.1.1). По-прежнему будем считать справедливыми упрощающие ограничения (2.1.2) при $N_\pi \geq 2$, где N_π – число воздействующих узкополосных помех в совокупности принятых сигналов.

Адаптивный алгоритм приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам

$$\ln \Lambda_{rl} > 0, \quad r \neq l \quad (5.4.2)$$

определяется отношением правдоподобия

$$\Lambda_{rl} = \frac{\int W(\boldsymbol{\mu}/\mathbf{Z}'_M)W(\boldsymbol{\mu}_\pi/\mathbf{x}_N)\mathcal{F}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\pi)d\boldsymbol{\mu}d\boldsymbol{\mu}_\pi}{\int W(\boldsymbol{\mu}/\mathbf{Z}'_M)W(\boldsymbol{\mu}_\pi/\mathbf{x}_N)\mathcal{F}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'_l, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\pi)d\boldsymbol{\mu}d\boldsymbol{\mu}_\pi}, \quad (5.4.3)$$

в котором априорные распределения неизвестных параметров заменены апостериорными, сформированными при помощи обучающих выборок. В (5.4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'_r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_\pi) = \exp \left\{ \frac{2}{v^2} \sum_{q=1}^Q \int_{LT}^{(L+1)T} \mathbf{Z}'(t) [\mu_{cq} \mathbf{Z}'_q(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathbf{Z}}_q(t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{N_\pi} (\mu_{cni} \mathbf{Z}'_{mi}(t) + \mu_{smi} \tilde{\mathbf{Z}}_{mi}(t))] dt - \frac{1}{v^2} \int_{LT}^{(L+1)T} \left[\sum_{q=1}^Q (\mu_{cq} \mathbf{Z}'_{rq}(t) + \mu_{sq} \tilde{\mathbf{Z}}_{rq}(t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{N_\pi} (\mu_{cni} \mathbf{Z}'_{mi}(t) + \mu_{smi} \tilde{\mathbf{Z}}_{mi}(t)) \right]^2 dt \right\} \quad (5.4.4) \end{aligned}$$

– функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\mathbf{Z}'(t)$ при передаче сигнала $\mathbf{Z}'_r(t)$ (в (5.4.4) полагаем $v^2_q = v^2 = \text{const}(q)$);

$W(\boldsymbol{\mu}_\pi/\mathbf{x}_N)$ – апостериорное распределение параметров узкополосных помех $\boldsymbol{\mu}_\pi = \{\mu_{cni}, \mu_{smi}\}_{i=1, \dots, N_\pi}$, сформированное при помощи обучающей выборки (2.2.5);

$W(\boldsymbol{\mu}/\mathbf{Z}'_M)$ – апостериорное распределение параметров сигнала $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_{cq}, \mu_{sq}\}_{q=1, \dots, Q}$, сформированное при помощи обучающей выборки

$$\mathbf{Z}'_{N+1}(t), \dots, \mathbf{Z}'_k(t), \dots, \mathbf{Z}'_M(t), \quad (5.4.5)$$

где $\mathbf{Z}'_k(t)$ определяется (5.4.1).

Рассуждая аналогично приведенному в параграфе 2.6 найдем апостериорное распределение параметров помех. Ограничиваясь гауссовым приближением, что в условиях высокой точности измерения параметров достаточно для практических целей, представим апостериорную плотность вероятностей в виде

$$W(\mathbf{\mu}_n / \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^{N_n} \frac{1}{2\pi\sigma_{ni}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{ni}^2} [(\mu_{cni} - m_{cni}^{(N)})^2 + (\mu_{sni} - m_{sni}^{(N)})^2] \right\}, \quad (5.4.6)$$

где $m_{cni}^{(N)}$ и σ_{ni}^2 определяются рекуррентными соотношениями (2.6.8), (2.6.9).

После усреднения (5.4.4) по $\mathbf{\mu}_n$ в соответствии с (5.4.6) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}_r, \mathbf{\mu}) &= \int_{G(\mathbf{\mu}_n)} W(\mathbf{\mu}_n / \mathbf{x}_n) \mathcal{F}(\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}_r, \mathbf{\mu}, \mathbf{\mu}_n) d\mathbf{\mu}_n = \\ &= \text{const} \exp \left\{ \sum_{q=1}^Q (\mu_{cq} X_{rq} + \mu_{sq} Y_{rq}) - \frac{1}{\nu^2} \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^Q [(\mu_{cq} \mu_{cp} + \mu_{sp} \mu_{sq}) \rho_{qp} + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{cq} \mu_{sp} - \mu_{sq} \mu_{cp}) \tilde{\rho}_{qp}^{(r)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

В (5.4.7) введены обозначения

$$\begin{aligned} X_{rq} &= \frac{2}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_n(t)] \mathcal{Z}_{rq}(t) dt, \\ Y_{rq} &= \frac{2}{\nu^2} \int_{LT}^{(L+1)T} [\mathcal{Z}'(t) - \hat{\mathcal{Z}}_n(t)] \tilde{\mathcal{Z}}_{rq}(t) dt, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

где $\hat{\mathcal{Z}}_n(t)$ – оценка совокупности узкополосных помех, определяемая выражением (2.6.13);

$$\rho_{qp} = \rho_{qp}^{(r)} - \sum_{i=1}^{N_n} \frac{x_{qi}^{(mr)} x_{pi}^{(mr)} + y_{qi}^{(mr)} y_{pi}^{(mr)}}{(1 + \frac{\hat{\sigma}_{mi}^2}{\sigma_{ni}^2}) E_{mi} E_q}; \quad q, p = 1, \dots, Q \quad (5.4.9)$$

– коэффициент, характеризующий степень разделимости сигналов и взаимную корреляцию сигналов и узкополосных помех в различных каналах приема. Степень разделимости сигналов q -го и p -го каналов определяется при помощи коэффициентов

$$\rho_{qp}^{(r)} = \frac{1}{E_q T} \int \mathcal{Z}_{rq}(t) \mathcal{Z}_{rp}(t) dt, \quad \tilde{\rho}_{qp}^{(r)} = \frac{1}{E_q T} \int \mathcal{Z}_{rq}(t) \tilde{\mathcal{Z}}_{rp}(t) dt. \quad (5.4.10)$$

В дальнейшем энергия элемента переданного сигнала

$$E_q = \int_T Z_{rq}^2(t) dt = \int_T \tilde{Z}_{rq}^2(t) dt \quad (5.4.11)$$

предполагается одинаковой для всех каналов, т. е. $E_q = E_c = \text{const}(q)$.

Различие структур сигналов и узкополосных помех в частотно-временной области определяется величинами

$$x_{qi}^{(mr)} = \int_T Z_{mi}(t) Z_{rq}(t) dt, \quad y_{qi}^{(mr)} = \frac{1}{E_q} \int_T \tilde{Z}_{mi}(t) Z_{rq}(t) dt. \quad (5.4.12)$$

Далее выражение (5.4.7) будет удобнее использовать в матричной форме:

$$\mathcal{F}(Z'/Z_r, \mu) = \text{const} \exp(\mathbf{V}_r^T \mu - \frac{1}{2} \mu^T \mathbf{G}_r \mu), \quad (5.4.13)$$

где $\mathbf{V}_r^T = X_{r1}, \dots, X_{rQ}, Y_{r1}, \dots, Y_{rQ}$ – вектор-строка величин X_{rq}, Y_{rq} ;

$\mu^T = \mu_{c1}, \dots, \mu_{cQ}, \mu_{s1}, \dots, \mu_{sQ}$ – вектор-строка величин μ_{cq}, μ_{sq} ;

μ – вектор-столбец этих же величин;

T – знак транспонирования;

$$\mathbf{G}_r = \frac{2E_c}{v^2} \begin{bmatrix} \rho_r & \tilde{\rho}_r \\ \tilde{\rho}_r^T & \rho_r \end{bmatrix} \quad (5.4.14)$$

– матрица квадратичной формы, которая характеризует степень разделимости сигналов и взаимную корреляцию сигналов и узкополосных помех в различных каналах приема. В (5.4.14) введены следующие обозначения для квадратных подматриц порядка Q :

$$\rho_r = \begin{bmatrix} B_{r1} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1Q} \\ \rho_{12} & B_{r2} & \dots & \rho_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1Q} & \rho_{2Q} & \dots & B_{rQ} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\rho}_r = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\rho}_{12}^{(r)} & \dots & \tilde{\rho}_{1Q}^{(r)} \\ -\tilde{\rho}_{12}^{(r)} & 0 & \dots & \tilde{\rho}_{2Q}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{\rho}_{1Q}^{(r)} & -\tilde{\rho}_{2Q}^{(r)} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4.15)$$

Здесь

$$B_{rq} = 1 - \sum_{i=1}^{N_{\Pi}} \frac{g_{riq}^2}{1 + \hat{\sigma}_{mi}^2 / \sigma_{ni}^2},$$

где $g_{riq}^2 = \frac{1}{E_c E_{mi}} (x_{qi}^{(mr)2} + y_{qi}^{(mr)2})$

– коэффициент взаимной корреляции r -го сигнала в q -м канале с i -той узко-

полосной помехой;

ρ_{qp} определяется формулой (5.4.9);

$\rho_{qp}^{(r)}$ и $\tilde{\rho}_{qp}^{(r)}$ определяются соотношениями (5.4.10).

Следует обратить внимание, что подматрица ρ_r в (5.4.15) определяется коэффициентами, которые характеризуют разделимость сигналов и взаимную корреляцию между сигналами и узкополосными помехами в различных каналах, в то время как подматрица $\tilde{\rho}_r$ определяется только коэффициентами, характеризующими степень разделимости сигналов q -го и p -го каналов.

Выражение (5.4.13) позволяет найти алгоритм приема с обучением по узкополосным помехам при различных статистических характеристиках сигналов. В частности, для полностью известного сигнала следует алгоритм когерентного разнесенного приема

$$\mathbf{V}_r^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_r \boldsymbol{\mu} > \mathbf{V}_l^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_l \boldsymbol{\mu}, \quad r \neq l. \quad (5.4.16)$$

Для определения адаптивного алгоритма при неизвестных параметрах сигнала сформируем апостериорную плотность $W(\boldsymbol{\mu} / \mathbf{Z}')$ при помощи обучающей выборки (5.4.6) по формуле Байеса

$$W(\boldsymbol{\mu} / \mathbf{Z}'_M) = \frac{W(\boldsymbol{\mu}) \mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\mu})}{\int_{G(\bar{\boldsymbol{\mu}})} W(\boldsymbol{\mu}) \mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}}, \quad (5.4.17)$$

где

$$\mathcal{F}(\mathbf{Z}'_M / \boldsymbol{\mu}) = \text{const} \exp(\mathbf{U}_r^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\theta}_r \boldsymbol{\mu}) \quad (5.4.18)$$

– функционал отношения правдоподобия обучающей выборки (5.4.5) после усреднения по апостериорному распределению параметров узкополосных помех.

В (5.4.18) $\mathbf{U}_r^T = m_{c1}, \dots, m_{cQ}, m_{s1}, \dots, m_{sQ}$ – вектор-строка величин m_{cq}, m_{sq} , равных

$$m_{cq} = \frac{2}{v^2} \int_{NT}^{MT} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_n(t)] \mathbf{Z}_{rq}(t) dt, \quad (5.4.19)$$

$$m_{sq} = \frac{2}{v^2} \int_{NT}^{MT} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_n(t)] \tilde{\mathbf{Z}}_{rq}(t) dt,$$

$$\boldsymbol{\theta}_r = \frac{2(M-N)E_c}{v^2} \begin{bmatrix} \rho_r & \tilde{\rho}_r \\ \tilde{\rho}_r^T & \rho_r \end{bmatrix} \quad (5.4.20)$$

– матрица квадратичной формы, в которой подматрицы ρ_r и $\tilde{\rho}_r$ определены формулами (5.4.15).

Чтобы определить апостериорное распределение (5.4.17), необходимо знать априорное $W(\boldsymbol{\mu})$. При достаточно большом объеме обучающей выборки, в соответствии с теоремой Бернштейна и Мизеса [112], апостериорное распределение перестает зависеть от априорного, поэтому более или менее безразлично, каким будет априорное распределение. Рассмотрим для примера случай нормального априорного распределения $\boldsymbol{\mu}$ на первом этапе наблюдения

$$W(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^Q |\mathbf{K}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\mu}\right], \quad (5.4.21)$$

где $|\mathbf{K}|$ – определитель матрицы

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{\mu_{ck}\mu_{cp}} & \overline{\mu_{ck}\mu_{sp}} \\ -\overline{\mu_{ck}\mu_{sp}} & \overline{\mu_{sk}\mu_{sp}} \end{bmatrix}.$$

После подстановки в (5.4.17) соотношений (5.4.18), (5.4.21) и необходимых преобразований апостериорное распределение примет вид

$$W(\boldsymbol{\mu} / \mathbf{Z}'_M) = \frac{|\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r|^{1/2} \exp\left[\mathbf{U}_r^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r) \boldsymbol{\mu}\right]}{(2\pi)^Q \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{U}_r^T (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r)^{-1} \mathbf{U}_r\right]}. \quad (5.4.22)$$

Подставляя (5.4.4), (5.4.6), (5.4.22) в (5.4.3) и вычисляя интегралы сначала по $\boldsymbol{\mu}_r$, затем по $\boldsymbol{\mu}$, в соответствии с (5.4.2) получим адаптивный алгоритм приема с обучением по сигналу и по узкополосным помехам в форме

$$\begin{aligned} & (\mathbf{V}_r^T + \mathbf{U}_r^T)(\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r + \mathbf{G}_r)^{-1}(\mathbf{V}_r + \mathbf{U}_r) - \mathbf{U}_r^T (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r)^{-1} \mathbf{U}_r - \\ & - \ln \left| \mathbf{I} + (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_r)^{-1} \mathbf{G}_r \right| > (\mathbf{V}_l^T + \mathbf{U}_l^T)(\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_l + \mathbf{G}_l)^{-1}(\mathbf{V}_l + \mathbf{U}_l) - \\ & - \mathbf{U}_l^T (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_l)^{-1} \mathbf{U}_l - \ln \left| \mathbf{I} + (\mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\theta}_l)^{-1} \mathbf{G}_l \right|, \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Правило (5.4.23) сочетает в себе особенности когерентного и некогерентного приема. При этом результаты обработки для каждой позиции сигнала перед принятием решения сравниваются со своим порогом.

Из алгоритма (5.4.23) следуют различные частные случаи. При релейских замираниях сигнала и обучении по сигналу на одном элементе правило приема (5.4.23) преобразуется к известному виду [4]

$$\mathbf{V}_r^T (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_r)^{-1} \mathbf{V}_r - \ln |\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_r| > \mathbf{V}_l^T (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_l)^{-1} \mathbf{V}_l - \ln |\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_l|, \quad r \neq l. \quad (5.4.24)$$

При достаточно большом объеме обучающей выборки сигнала или при любых размерах обучающей выборки и достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности шума из (5.4.24) следует решающее правило

$$\begin{aligned} & (\mathbf{V}_r + \mathbf{U}_r)^T (\boldsymbol{\theta}_r + \mathbf{G}_r)^{-1} (\mathbf{V}_r + \mathbf{U}_r) - \mathbf{U}_r^T \boldsymbol{\theta}_r^{-1} \mathbf{U}_r - \ln |\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}_r^{-1} \mathbf{G}_r| > \\ & > (\mathbf{V}_l + \mathbf{U}_l)^T (\boldsymbol{\theta}_l + \mathbf{G}_l)^{-1} (\mathbf{V}_l + \mathbf{U}_l) - \mathbf{U}_l^T \boldsymbol{\theta}_l^{-1} \mathbf{U}_l - \ln |\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}_l^{-1} \mathbf{G}_l|, \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Можно показать, что такое же правило решения будет при равномерном априорном распределении параметров сигнала, которое соответствует наибольшей априорной неопределенности. В частном случае обучения на одном элементе сигнала ($M - N = 1$) из (5.4.25) получаем известный алгоритм

$$\mathbf{V}_r^T \mathbf{G}_r^{-1} \mathbf{V}_r > \mathbf{V}_l^T \mathbf{G}_l^{-1} \mathbf{V}_l, \quad r \neq l, \quad (5.4.26)$$

построенный на принципе замены неизвестных параметров сигнала в (5.4.16) их максимально правдоподобными оценками.

Приведенные алгоритмы зависят от матриц, характеризующих степень разделимости сигналов и взаимную корреляцию сигналов и узкополосных помех в различных каналах приема. Прием по параллельным каналам с сильной взаимной корреляцией узкополосных помех может оказаться не очень эффективным даже при полном разделении сигналов. Такое явление может наблюдаться, например, при пространственно-разнесенном приеме. В этом смысле более рационален частотно-разнесенный прием. Конечно, возможны такие виды параллельных каналов, когда полное разделение сигналов затруднено, а наличие узкополосных помех усугубляет трудности, например, при многолучевом распространении радиоволн. Тогда целесообразно использовать специальные виды сигналов, например, типа частотно-временной матрицы, с частотно-модулированным заполнением, шумоподобные и другие, которые облегчают преодоление возникающих трудностей.

В условиях полной разделимости сигналов и отсутствия взаимной корреляции сигналов и узкополосных помех в различных каналах матрица \mathbf{G}_r (а следовательно и $\boldsymbol{\theta}_r$) вырождается в диагональную

$$\mathbf{G}_r = \frac{2\mathbf{E}}{V^2} \begin{bmatrix} E_{rq} \delta_{qp} & & 0 \\ \text{-----} & \vdots & \text{-----} \\ 0 & & E_{rq} \delta_{qp} \end{bmatrix}; \quad q, p = 1, \dots, Q. \quad (5.4.27)$$

что существенно упрощает алгоритмы приема (в формуле (5.4.27) δ_{qp} – символ

Кroneкера). В частности, при условии (5.4.27) алгоритм (5.4.26) можно записать в обычной форме

$$\sum_{q=1}^Q \frac{V_{rq}^2}{B_{rq}} > \sum_{q=1}^Q \frac{V_{lq}^2}{B_{lq}}, \quad (5.4.28)$$

где

$$V_{rq}^2 = \left(\int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_n(t)] \mathbf{Z}_{rq}(t) dt \right)^2 + \left(\int_{LT}^{(L+1)T} [\mathbf{Z}'(t) - \hat{\mathbf{Z}}_n(t)] \tilde{\mathbf{Z}}_{rq}(t) dt \right)^2.$$

При симметричном воздействии узкополосных помех на различные варианты сигналов правило (5.4.28) совпадает с алгоритмом квадратичного сложения разнесенных сигналов. Алгоритм приема (5.4.28) можно использовать как субоптимальный и при неполном разделении сигналов различных каналов.

В каналах с неизменными параметрами сигнала алгоритм (5.4.23) и (5.4.25) по мере увеличения размера обучающей выборки асимптотически стремится к алгоритму когерентного разнесенного приема с обучением по узкополосным помехам.

5.5. Прием многочастотных сигналов в многолучевых каналах

Характерным примером неполного разделения сигналов может служить прием в многолучевых каналах. Чтобы вскрыть основные особенности работы в рассматриваемых условиях проведем анализ помехоустойчивости приема многочастотных сигналов. Использование многочастотных сигналов улучшает разделимость лучей и облегчает борьбу с узкополосными помехами, которая в ряде случаев сводится к режекции составляющих сигнала, пораженных узкополосными помехами. Рассмотрим в качестве иллюстрации помехоустойчивость приема двоичных ортогональных в усиленном смысле сигналов (ЧМ).

Представим передаваемые сигналы в комплексной форме:

$$\underline{Z}_r(t) = \sum_{k=1}^{m'} \underline{Z}_{rk}(t) = \sum_{k=1}^{m'} e^{j\omega_{rk}t}, \quad r = 1, 2; \quad t \in T, \quad (5.5.1)$$

где

$$\omega_{1k} = \omega_0 + 2k\Delta\omega; \quad \omega_{2k} = \omega_0 + (2k-1)\Delta\omega; \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T};$$

m' – число частотных составляющих переданного сигнала.

Полезный сигнал на выходе Q -лучевого канала (без аддитивной помехи) имеет вид:

$$\underline{Z}'_r(t) = \sum_{q=1}^Q \underline{M}_q \underline{Z}_r(t - \tau_q) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^m \mu_q \exp\{j[\omega_{rk}(t - \tau_q) + \varphi_q]\}. \quad (5.5.2)$$

Здесь $\underline{M}_q = \mu_q e^{j\varphi_q}$ – комплексный коэффициент передачи канала по q -му лучу;

τ_q – время запаздывания q -го луча относительно первого ($\tau_1 = 0$).

При действии узкополосных помех в приемнике производится режекция частотных составляющих сигнала, пораженных помехами, поэтому во второй сумме в (5.5.2) под m подразумевается фактическое число составляющих сигнала, оставшихся после режекции. Меняя в (5.5.2) порядок суммирования, можно принимаемый полезный сигнал представить также в виде:

$$\underline{Z}'_r(t) = \sum_{k=1}^m e^{j\omega_{rk}t} \sum_{q=1}^Q \mu_q \exp[-j(\omega_{rk}\tau_q + \varphi_q)] = \sum_{k=1}^m \underline{\alpha}_k \underline{Z}_{rk}(t), \quad (5.5.3)$$

где

$$\underline{\alpha}_k = \sum_{q=1}^Q \mu_q \exp[-j(\omega_{rk}\tau_q + \varphi_q)]. \quad (5.5.4)$$

Таким образом, результирующая смесь сигнала с помехами на входе приемника

$$\underline{Z}'(t) = \underline{Z}'_r(t) + \underline{\xi}(t), \quad r = 1, 2. \quad (5.5.5)$$

Двум способам представления сигнала (5.5.2) и (5.5.3) соответствуют два метода приема:

1. Метод, основанный на разделении лучей, отличающихся временными запаздываниями (разнесение по лучам).
2. Метод, основанный на разнесении составляющих сигнала по частоте (частотно-разнесенный прием).

Рассмотрим наиболее простой случай приема по правилу (5.4.24) в условиях релейских замираний в статистически однородных каналах. Анализ помехоустойчивости проведем при условии

$$|\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_1| \approx |\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_2|. \quad (5.5.6)$$

Тогда правило (5.4.24) можно записать так:

$$\operatorname{Re}[\underline{\mathbf{V}}_1(\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} \underline{\mathbf{V}}_1^+] > \operatorname{Re}[\underline{\mathbf{V}}_2(\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_2)^{-1} \underline{\mathbf{V}}_2^+]. \quad (5.5.7)$$

Здесь «+» – знак комплексно-сопряженной операции транспонирования.

Применительно к данной задаче обозначения в (5.5.7) имеют следующий смысл:

1. Прием с разделением лучей.

$\underline{\mathbf{V}}_r^+$ – комплексный Q -мерный вектор-строка с элементами:

$$\underline{v}_{rq} = \frac{1}{v^2} \int_{\tau_q}^{T+\tau_q} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r^*(t - \tau_q) dt, \quad r = 1, 2; \quad (5.5.8)$$

\underline{V}_r – вектор-столбец этих же величин;

\mathbf{K} – матрица ковариаций гауссовых величин \underline{M}_q размером $Q \times Q$. При независимых замираниях сигналов в лучах она диагональна:

$$\mathbf{K} = \sigma_c^2 [\mathbf{I}], \quad (5.5.9)$$

$$\sigma_c^2 = \overline{\underline{M}_q \underline{M}_q^*};$$

$[\mathbf{I}]$ – единичная матрица размером $Q \times Q$;

$$\mathbf{G}_r = \frac{E_c}{v^2} \mathbf{R}^{(r)}, \quad (5.5.10)$$

где

$$E_c = \frac{1}{2} \int_T |\underline{Z}_r(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_T |\underline{Z}_{rk}(t)|^2 dt = mE_0,$$

$\mathbf{R}^{(r)} = \rho_{qp} + j\tilde{\rho}_{qp}$ – эрмитова матрица размером $Q \times Q$, определяющая разделимость сигналов:

$$\mathbf{R}^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & R_{12} & \cdots & R_{1Q} \\ R_{12}^* & 1 & \cdots & R_{2Q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1Q}^* & R_{2Q}^* & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.5.11)$$

$$R_{qp}^{(r)} = \frac{1}{2E_c} \int_{\tau_q}^{T+\tau_p} \underline{Z}_r(t - \tau_q) \underline{Z}_r^*(t - \tau_p) dt. \quad (5.5.12)$$

Для равноотстоящих лучей ($\tau_q = (q-1)\Delta\tau$) одинаковой интенсивности из (5.5.12), (5.5.3) следует

$$R_{qp}^{(r)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \exp[jk(q-p)\Delta\omega\Delta\tau]. \quad (5.5.13)$$

При отсутствии узкополосных помех справедливо следующее выражение

$$R_{qp}^{(r)} = \frac{\sin[m'(q-p)\Delta\omega\Delta\tau/2]}{m' \sin[(q-p)\Delta\omega\Delta\tau/2]} \exp\left[\frac{j}{2}(m'-1)(q-p)\Delta\omega\Delta\tau\right].$$

2. Частотно-разнесенный прием.

$\underline{\mathbf{V}}_r^+$ – комплексный m -мерный вектор-строка с элементами

$$\underline{v}_{rk} = \frac{1}{v^2} \int_0^T \underline{Z}'(t) \underline{Z}_{rk}^*(t) dt, \quad r = 1, 2; \quad (5.5.14)$$

$\underline{\mathbf{V}}_r$ – комплексный m -мерный вектор-столбец;

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} \sigma_c^2 \mathbf{B} \quad (5.5.15)$$

– матрица ковариаций гауссовых величин α_k размером $m \times m$.

В (5.5.15) \mathbf{B} – эрмитова матрица размером $m \times m$, определяющая корреляцию между элементами сигнала:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{12}^* & 1 & \cdots & B_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1m}^* & B_{2m}^* & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.5.16)$$

Элементы матрицы \mathbf{B} равны [28]:

$$\begin{aligned} B_{kp} &= \frac{\overline{\alpha_k \alpha_p^*}}{\sqrt{\alpha_k^2 \alpha_p^2}} = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \exp[j(k-p)q\Delta\omega\Delta\tau] = \\ &= \frac{\sin[Q(k-p)\Delta\omega\Delta\tau/2]}{Q \sin[(k-p)\Delta\omega\Delta\tau/2]} \exp\left[\frac{j}{2}(Q-1)(k-p)\Delta\omega\Delta\tau\right]. \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Далее в (5.5.7)

$$\mathbf{G}_r = \frac{E_c}{mv^2} \mathbf{P}, \quad (5.5.18)$$

где \mathbf{P} – диагональная матрица размером $m \times m$, элементы главной диагонали которой состоят из единиц и нулей, причем единицы соответствуют нерезектированным частотным элементам, а нули – резектированным.

Из (5.5.7) следует, что для реализации оптимального алгоритма необходимо знание матриц \mathbf{K} и \mathbf{G}_r . При отсутствии априорных сведений об этих матрицах для приема можно использовать существенно более простой (субоптимальный) алгоритм квадратичного сложения

$$\underline{\mathbf{V}}_1 \underline{\mathbf{V}}_1^+ > \underline{\mathbf{V}}_2 \underline{\mathbf{V}}_2^+, \quad (5.5.19)$$

совпадающий с оптимальным (5.5.7) при полном разделении лучей либо при некоррелированных замираниях частотных составляющих сигнала.

Заметим, что алгоритмы (5.5.7) и (5.5.19) синтезированы для случая известных моментов времени прихода лучей, а также при выполнении условия $T \gg \tau_{\max}$.

При сделанных предположениях относительно свойств канала обе части неравенств (5.5.7) и (5.5.19) представляют собой статистически независимые квадратичные формы гауссовых величин с нулевыми средними. Вероятность ошибки, равная вероятности невыполнения соответствующих неравенств при передаче сигнала $\underline{Z}_1(t)$, определяется общим выражением

$$p = \int_0^{\infty} W(\underline{\mathbf{a}}_1^{(1)}) d\underline{\mathbf{a}}_1^{(1)} \int_{\underline{\mathbf{a}}_1}^{\infty} W(\underline{\mathbf{a}}_2^{(1)}) d\underline{\mathbf{a}}_2^{(1)}, \quad (5.5.20)$$

где

$$\underline{\mathbf{a}}_r^{(1)} = \text{Re}[\underline{\mathbf{V}}_r (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_r)^{-1} \underline{\mathbf{V}}_r^+], \quad r = 1, 2 \quad (5.5.21)$$

– для алгоритма (5.5.7);

$$\underline{\mathbf{a}}_r^{(1)} = \text{Re}[\underline{\mathbf{V}}_r \underline{\mathbf{V}}_r^+] \quad (5.5.22)$$

– для алгоритма (5.5.19);

$W(\underline{\mathbf{a}}_r^{(1)})$ – плотность вероятности $\underline{\mathbf{a}}_r^{(1)}$ при передаче $\underline{Z}_1(t)$, определяемая в общем виде выражением [4]:

$$W(\underline{\mathbf{a}}_r) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{-y \underline{\mathbf{a}}_r} \frac{dy}{\prod_{q=1}^{t_r} (1 - 2y \lambda_{rq})^{n_{rq}}}. \quad (5.5.23)$$

Здесь λ_{rq} – собственные числа матрицы $\mathbf{A}_r = \mathbf{K}_r \mathbf{J}_r$,

где \mathbf{K}_r – матрица ковариаций величин v_{rq} (v_{rk}),

\mathbf{J}_r – матрица преобразований квадратичной формы $\underline{\mathbf{a}}_r^{(1)}$.

Для алгоритма (5.5.7) $\mathbf{J}_r = (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_r)^{-1}$,

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{G}_1 (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_1), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{G}_2, \quad (5.5.24)$$

поэтому

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}_1 (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} = \mathbf{G}_1 \mathbf{K}, \quad (5.5.25)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{K}_2 (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_2)^{-1} = \mathbf{G}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{K}.$$

Из (5.5.25) при условии (5.5.6) находим

$$\lambda_{1q} = \lambda_q, \quad \lambda_{2q} = \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q}, \quad (5.5.26)$$

где λ_q – собственные числа матрицы $\mathbf{A}_1 = \mathbf{K} \mathbf{G}$.

Для алгоритма (5.5.19) $\mathbf{J}_r = \mathbf{I}$, а \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 такие же, как в (5.5.24), поэтому в результате решения характеристических уравнений получим [4]:

$$\lambda_{1q} = 1 + \lambda_q, \quad \lambda_{2q} = 1. \quad (5.5.27)$$

В (5.5.23) учтено, что при некоторых значениях временного сдвига между лучами имеют место кратные собственные числа λ_{rq} кратностью n_{rq} , причем

$$\sum_{q=1}^{t_r} n_{rq} = n,$$

где $n = Q$ – для разнесения по лучам,
 $n = m$ – для разнесения по частотам,
 t_r – количество различных собственных чисел.

Подставим (5.5.23) в (5.5.20) и проинтегрируем

$$p = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{d\theta_1}{\prod_{q=1}^{t_1} (1 - 2\theta_1 \lambda_{1q})^{n_{1q}}} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{d\theta_2}{\prod_{k=1}^{t_2} (1 - 2\theta_2 \lambda_{2k})^{n_{2k}}} \cdot \frac{1}{\theta_2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (5.5.28)$$

Полюсы подынтегральной функции во внутреннем интеграле $\theta_k = \frac{1}{2\lambda_{2k}}$, $k = 1, \dots, t_2$ (кратность n_{2k}), $a_{Q+1} = 0$, $a_{Q+2} = -\theta_1$. Таким образом, два полюса расположены на линии интегрирования, остальные справа. Вычисляя вычеты по левой полуплоскости и вычеты на границе, определим внутренний интеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{d\theta_2}{\theta_2(\theta_1 + \theta_2) \prod_{k=1}^{t_2} (1 - 2\theta_2 \lambda_{2k})^{n_{2k}}} = \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1 \prod_{k=1}^{t_2} (1 + 2\theta_2 \lambda_{2k})^{n_{2k}}}. \quad (5.5.29)$$

С учетом (5.5.29) запишем (5.5.28)

$$p = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{d\theta_1}{\theta_1 \prod_{q=1}^{t_1} (1 - 2\theta_1 \lambda_{1q})^{n_{1q}}} \left[1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{t_2} (1 + 2\theta_1 \lambda_{2k})^{n_{2k}}} \right]. \quad (5.5.30)$$

Из (5.5.30) следует, что $\theta_1 = 0$ – устранимая особая точка, $\theta_1 = \frac{1}{2\lambda_{1q}}$ –

полюсы справа, $\theta_1 = -\frac{1}{2\lambda_{2k}}$ – полюсы слева. Беря вычеты относительно полюсов, получаем выражение для вероятности ошибки в общем виде

$$p = \sum_{q_0=1}^{t_1} \frac{1}{(2\lambda_{1q_0})^{n_{1q_0}} (n_{1q_0} - 1)!} \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2\lambda_{1q_0}}} \left(\frac{d}{dy} \right)^{n_{1q_0} - 1} \times$$

$$\times \left[\frac{\prod_{q=1}^{t_1} (1 + 2y\lambda_{1q})^{n_{1q}} - 1}{\prod_{k=1}^{t_2} (1 - 2y\lambda_{2k})^{n_{2k}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq q_0}}^{t_1} (1 + 2y\lambda_{1q})^{n_{1q}}} y \right]. \quad (5.5.31)$$

Из общей формулы (5.5.31) следуют частные случаи. Так, при отсутствии кратных собственных чисел матрицы \mathbf{A}_r выражение для вероятности ошибки совпадает с известным [4]

$$p = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{1k}^{2n-1}}{(\lambda_{1k} + \lambda_{2k}) \prod_{p \neq k} (\lambda_{2p} + \lambda_{1k})(\lambda_{1k} - \lambda_{1p})}. \quad (5.5.32)$$

В случае, когда собственные числа матрицы \mathbf{A}_r имеют кратность n , из (5.5.31) находим выражение для вероятности ошибки

$$p = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!}{k!} \cdot \frac{\lambda_1^k \lambda_2^n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{k+n}}, \quad (5.5.33)$$

где $\lambda_{r1} = \lambda_{r2} = \dots = \lambda_r$ ($r = 1, 2$).

Из (5.5.31)–(5.5.33) следует, что задача вычисления вероятности ошибки сводится к задаче определения собственных чисел матрицы \mathbf{A}_r , которые в соответствии с (5.5.26), (5.5.27) определяются собственными числами матрицы $\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}\mathbf{G}$.

Проведем сравнительную оценку приема методом разделения лучей и частотно-разнесенном. Рассмотрим вначале помехоустойчивость приема по правилу (5.5.7). Используя формулы (5.5.9)–(5.5.18), запишем матрицу $\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}\mathbf{G}$ в виде:

1) прием с разделением лучей

$$\mathbf{A}_1^{(\Lambda)} = \mathbf{K}\mathbf{G} = \overline{h_0^2} m \mathbf{R} = \overline{h_0^2} \mathcal{R}; \quad (5.5.34)$$

2) частотно-разнесенный прием

$$\mathbf{A}_1^{(\psi)} = \mathbf{K}\mathbf{G} = \overline{h_0^2} \mathbf{Q}\mathbf{B} = \overline{h_0^2} \mathcal{B}. \quad (5.5.35)$$

Здесь $\overline{h_0^2} = \sigma_c^2 E_c / \nu^2$ – отношение средней энергии элементарного сигнала, переданного посредством одного луча, к спектральной плотности мощности шума;

$$\mathcal{R} = m \mathbf{R}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{Q}\mathbf{B} \quad (5.5.36)$$

– эрмитовы матрицы, в которых \mathbf{R} и \mathbf{B} определяются (5.5.11), (5.5.16).

Из (5.5.34), (5.5.35) видим, что

$$\begin{aligned} \lambda_q^{(\Lambda)} &= \overline{h_0^2} \lambda_q^{(\mathcal{R})}, \\ \lambda_q^{(\psi)} &= \overline{h_0^2} \lambda_q^{(\mathcal{B})}, \end{aligned} \quad (5.5.37)$$

где $\lambda_q^{(\mathcal{R})}$ и $\lambda_q^{(\mathcal{B})}$ – собственные числа матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} . Отсюда следует, что сравнение помехоустойчивости обоих методов сводится к сравнению собственных чисел матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} . Покажем, что они имеют одинаковые собственные числа. Для этого введем вспомогательную матрицу

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^Q \\ a^2 & a^4 & a^6 & \dots & a^{2Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^m & a^{2m} & a^{3m} & \dots & a^{mQ} \end{bmatrix}, \quad \text{где } a = e^{jX}, \quad (5.5.38)$$

обозначим: $\mathbf{D} = (a^{pq})$, $\mathbf{D}^T = (a^{qp})$, $\mathbf{D}^* = (a^{-pq})$ (T – операция транспонирования, $*$ знак комплексного сопряжения, $+$ знак комплексно-сопряженной операции транспонирования). Рассмотрим произведения матриц

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} m & r_1 & r_2 & \cdots & r_{Q-1} \\ r_1^* & m & r_1 & \cdots & r_{Q-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{Q-1}^* & r_{Q-2}^* & r_{Q-3}^* & \cdots & m \end{bmatrix}, \quad (5.5.39)$$

где $r_k = a^k + a^{2k} + \dots + a^{mk}$;

$$\mathbf{D}^* \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} Q & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \cdots & \mathfrak{b}_{m-1} \\ r_1^* & Q & \mathfrak{b}_1 & \cdots & \mathfrak{b}_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{b}_{m-1}^* & \mathfrak{b}_{m-2}^* & \mathfrak{b}_{m-3}^* & \cdots & Q \end{bmatrix}, \quad (5.5.40)$$

где $\mathfrak{b}_k = a^k + a^{2k} + \dots + a^{Qk}$.

Совпадение собственных чисел матриц $\mathbf{D}^+ \mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^* \mathbf{D}^T$ вытекает из следующих утверждений:

1. Если \mathbf{A} есть $(m \times Q)$ -матрица и \mathbf{B} есть $(Q \times m)$ -матрица, то \mathbf{AB} и \mathbf{BA} имеют одинаковые собственные числа, за исключением того, что произведение большего порядка имеет сверх того $(Q - m)$ нулевых собственных значений [164]. Отсюда следует, что собственные числа матриц $\mathbf{D}^T \mathbf{D}^*$ и $\mathbf{D}^* \mathbf{D}^T$ совпадают.

2. Собственные числа эрмитовой матрицы действительны, поэтому совпадают собственные числа матриц $\mathbf{D}^T \mathbf{D}^*$ и $\mathbf{D}^+ \mathbf{D}$. Таким образом, собственные числа матриц $\mathbf{D}^+ \mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^* \mathbf{D}^T$ совпадают.

Сравнивая (5.5.39) и (5.5.40) (для $x = \Delta\omega\Delta\tau$) с (5.5.36) с учетом (5.5.11), (5.5.13) и (5.5.16), (5.5.17) убеждаемся, что $\mathbf{D}^+ \mathbf{D} = \mathcal{R}$ и $\mathbf{D}^* \mathbf{D}^T = \mathcal{B}$. Поэтому матрицы \mathcal{R} и \mathcal{B} имеют одинаковые ненулевые собственные числа. Следовательно

$$\lambda_q^{(\Lambda)} = \lambda_q^{(\mathcal{U})}. \quad (5.5.41)$$

Из (5.5.41) непосредственно следует, что в релейском канале с дискретной многолучевостью и известным временем запаздывания отдельных лучей при использовании оптимального алгоритма (5.5.7) прием сигналов с разделением лучей и частотно-разнесенный обеспечивают одинаковую помехоустойчивость при произвольных m и Q . Таким образом, неполное разделение сигналов при приеме с разделением лучей и корреляция замираний при частотно-разнесенном приеме одинаково влияют на помехоустойчивость. Для частного

случая двухлучевого канала это было показано в [4].

Определим зависимость вероятности ошибки при использовании оптимального алгоритма (5.5.7) от количества лучей, времени запаздывания между ними и числа используемых частот. С этой целью рассмотрим матрицы \mathbf{R} и \mathbf{B} . Учитывая, что элементы этих матриц определяются (5.5.13) и (5.5.17), трудно показать, что при приеме m -частотного сигнала в Q -лучевом канале при изменении $\Delta\omega\Delta\tau$ ранг матриц \mathbf{R} и \mathbf{B} изменяется от единицы до F , где

$$F = \inf [Q, m]. \quad (5.5.42)$$

При этом наиболее низкая помехоустойчивость имеет место в случае, когда ранг матриц \mathbf{R} и \mathbf{B} равен единице, а собственное значение

$$\lambda_1 = mQ\overline{h_0^2}. \quad (5.5.43)$$

Подставляя (5.5.43) в (5.5.33) находим выражение для вероятности ошибки

$$p = \frac{1}{mQ\overline{h_0^2} + 2}. \quad (5.5.44)$$

Наиболее высокая помехоустойчивость приема реализуется в случае, когда ранг матриц \mathbf{R} и \mathbf{B} равен F , а собственные числа равны между собой

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_F = \frac{mQ}{F}\overline{h_0^2}. \quad (5.5.45)$$

Подставляя (5.5.45) в (5.5.33) находим

$$p = \sum_{k=0}^{F-1} C_{F-1+k}^k \left(\frac{mQ}{F}\overline{h_0^2} + 1 \right)^k / \left(\frac{mQ}{F}\overline{h_0^2} + 2 \right)^{F+k}. \quad (5.5.46)$$

На рис. 5.5.1 приведены построенные в соответствии с (5.5.32) и (5.5.33) зависимости вероятности ошибки P от $\Delta\omega\Delta\tau$ для оптимального алгоритма (5.5.7) при различном числе лучей и частот. Собственные числа матриц \mathbf{R} и \mathbf{B} вычислялись на ЭВМ.

Из (5.5.44) и (5.5.46) и кривых рис. 5.5.1 можно сделать следующие выводы. При оптимальном приеме m -частотного сигнала в Q -лучевом канале в зависимости от времени запаздывания между лучами вероятность ошибки изменяется от значений, характеризующих помехоустойчивость в однолучевом канале, до значений, определяющих вероятности ошибок при передаче информации по F независимым каналам. Причем при $m > Q$ минимальное значение вероятности ошибки не зависит от числа используемых частот, вследствие чего представляется целесообразным увеличивать количество используемых частот, т. к. при этом облегчается выполнение условия разделения лучей и увеличивается диапазон значений $\Delta\omega\Delta\tau$, в котором вероятность ошибки близка к мини-

мальной и примерно постоянна, что свидетельствует о более устойчивой работе системы связи при флуктуациях времени запаздывания. Кроме того, для реализации алгоритма (5.5.7) при приеме с разделением лучей необходимо знание моментов прихода отдельных лучей, которые с достаточной степенью точности можно оценить лишь при условии $m > Q$. При неизвестных $\Delta\tau$ и $m < Q$ использование частотно-разнесенного приема более предпочтительно, т. к. для его организации не требуется знание $\Delta\tau$.

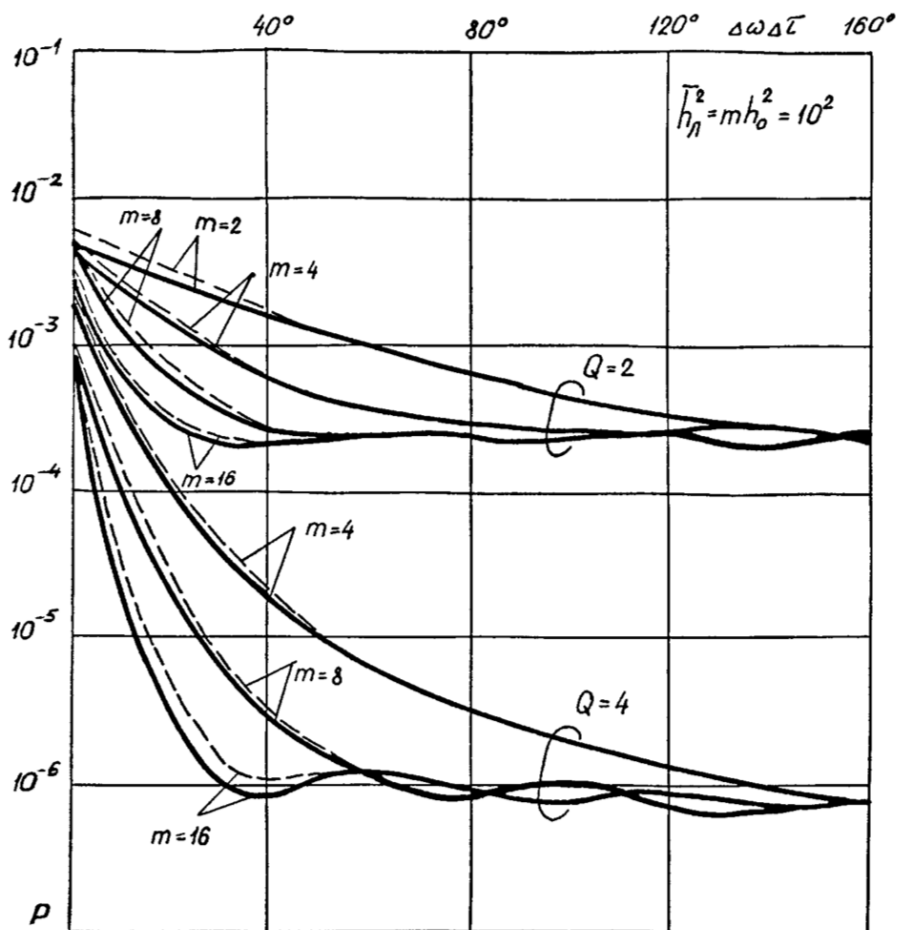


Рис. 5.5.1. Зависимость $p = f(\Delta\omega\Delta\tau)$ при методе приема, основанном на разделении лучей (Q – число лучей, m – число частот):
 — оптимальный прием; - - - субоптимальный прием

Для выяснения особенностей влияния на помехоустойчивость приема по правилу (5.5.7) действия узкополосных помех на рис. 5.5.2 построены зависимости P от $\Delta\omega\Delta\tau$ для случая приема сигнала в двухлучевом канале, содержащего восемь частотных элементов, из которых четыре режектированы вследствие действия помех, причем режектируемые и нережектируемые элементы сигнала образуют различные комбинации, характер которых указан на рисунке. Так, единицам соответствуют нережектируемые элементы, а нулям – режектируемые.

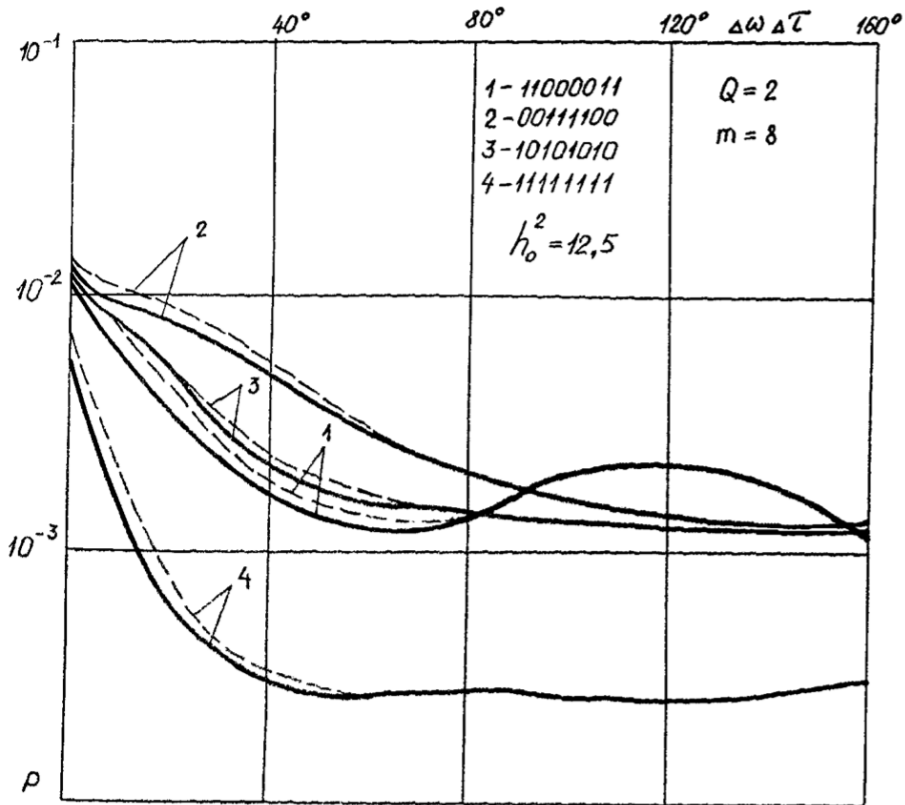


Рис. 5.5.2. Зависимость $p = f(\Delta\omega\Delta\tau)$ при разных вариантах режекций частот составляющих:
 — оптимальный прием; — — — субоптимальный прием

Анализ кривых показывает, что при малых запаздываниях лучей наименьшая помехоустойчивость получается при режекции крайних частотных элементов, а при больших запаздываниях помехоустойчивость приема почти не зависит от комбинации режектируемых и нережектируемых элементов сигнала и определяется лишь их числом.

Далее рассмотрим помехоустойчивость приема при использовании субоп-

тимального алгоритма (5.5.19). Вероятность ошибки для алгоритма (5.5.19) определяется соотношениями (5.5.31)–(5.5.33), в которых λ_{rk} выражены через собственные числа матрицы $\mathbf{A}_1 = \mathbf{KG}$ по формуле (5.5.27). В соответствии с (5.5.27), (5.5.34), (5.5.35)

$$\lambda_{1k} = 1 + \overline{h_0^2} \lambda_k^{(\mathcal{R})}, \quad \lambda_{2k} = 1 \quad (5.5.47)$$

– для приема с разделением лучей;

$$\lambda_{1k} = 1 + \overline{h_0^2} \lambda_k^{(\mathcal{B})}, \quad \lambda_{2k} = 1 \quad (5.5.48)$$

– для частотно-разнесенного приема. Здесь $\lambda_k^{(\mathcal{R})}$ и $\lambda_k^{(\mathcal{B})}$ – собственные числа матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} (5.5.36).

Выше было показано, что эти матрицы имеют одинаковое количество ненулевых собственных чисел. Из (5.5.47), (5.5.48) видно, что, в отличие от оптимального приема, в данном случае вероятность ошибки будет определяться как ненулевыми, так и нулевыми собственными числами матриц \mathbf{R} и \mathbf{B} . Учитывая, что при приеме m -частотного сигнала в Q -лучевом канале матрицы \mathbf{R} и \mathbf{B} имеют различное количество собственных чисел – m и Q соответственно – вероятность ошибки, в общем случае, при приеме с разделением лучей и частотно-разнесенном оказывается различной. При этом наличие нулевых собственных чисел этих матриц приводит к увеличению вероятности ошибки при малых значениях $\Delta\omega\Delta\tau$. Из сказанного следует, что при субоптимальном приеме m -частотного сигнала в Q -лучевом канале при малых значениях $\Delta\omega\Delta\tau$ более помехоустойчивым оказывается прием с разделением лучей, если $m > Q$ и частотно-разнесенный при $m < Q$. При $m = Q$, а также в области больших значений $\Delta\omega\Delta\tau$ при произвольных m и Q , оба способа приема позволяют реализовать одинаковую помехоустойчивость.

С целью сравнения помехоустойчивости субоптимального приема с оптимальным на рис. 5.5.1 и 5.5.2 показаны штриховыми линиями, построенные в соответствии с (5.5.32), зависимости вероятности ошибки P от $\Delta\omega\Delta\tau$ для различного количества лучей и частот. При построении кривых предполагалось, что применяется прием сигналов с разделением лучей. Анализируя полученные графики находим, что субоптимальный алгоритм (5.5.19) обеспечивает достаточно близкую помехоустойчивость к оптимальному алгоритму (5.5.7) в указанных режимах.

На рис. 5.5.3 для случая приема четырехчастотного сигнала в трехлучевом канале приведены зависимости вероятности ошибки P от $\Delta\omega\Delta\tau$ для оптимального алгоритма (5.5.7) (сплошная линия) и субоптимального (5.5.19) с разделением лучей (штриховая линия) и частотно-разнесенного (штрихпунктирная линия), подтверждающие ранее сделанный вывод о сравнительной помехо-

устойчивости, реализуемой при приеме сигналов с разделением лучей и частотно-разнесенном. Как видим, различие в помехоустойчивости обоих методов небольшое.

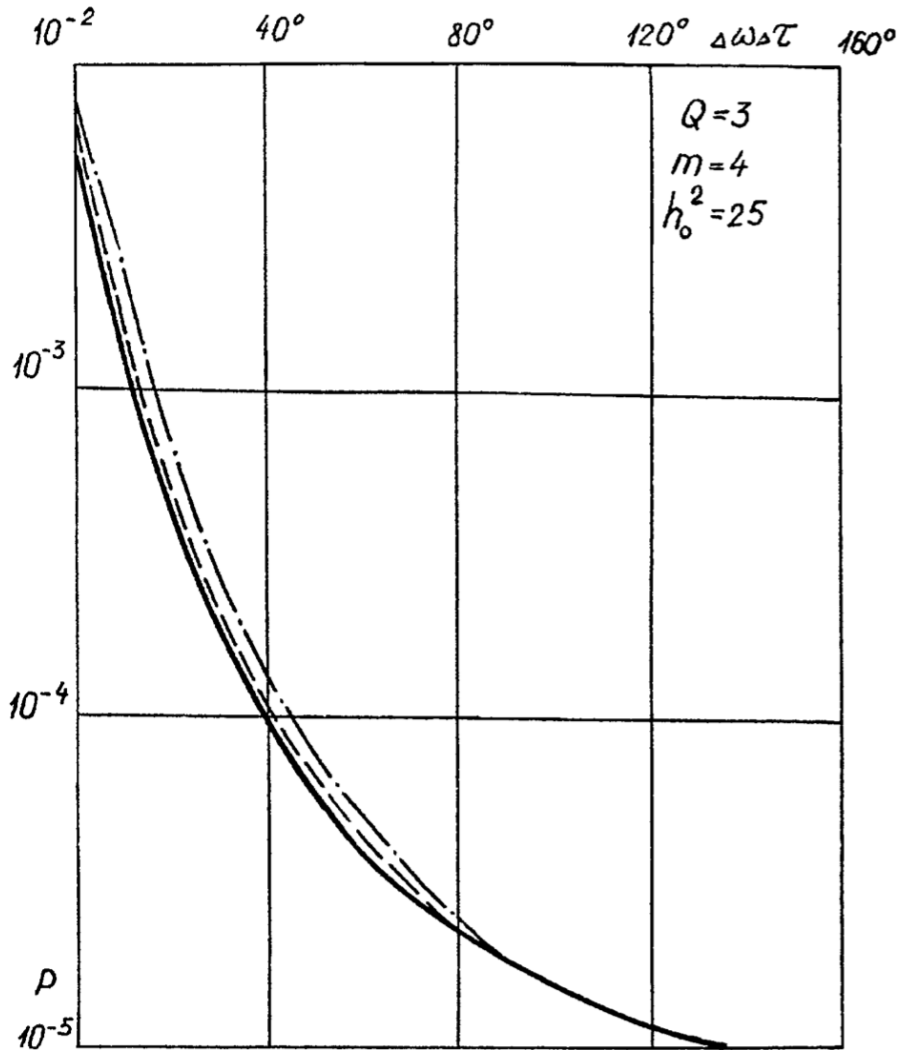


Рис. 5.5.3. Сравнение оптимального и субоптимального приема:
 — оптимальный прием; — — — субоптимальный с разделением лучей;
 — · — · субоптимальный частотно-разнесенный

На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. При использовании оптимального алгоритма (5.5.7) методы приема сигналов с разделением лучей и частотным разнесением позволяют реализовать одинаковую помехоустойчивость при произвольном числе элементов сигнала

лучей и произвольных запаздываниях между лучами.

2. При использовании субоптимального алгоритма (5.5.19) сравнительная помехоустойчивость методов приема зависит от соотношения частот и лучей, причем при $m > Q$ более помехоустойчивым является прием с разделением лучей, а при $m < Q$ – частотно-разнесенный. Величина энергетического проигрыша при неоптимальном приеме невелика и зависит от времени запаздывания между лучами.

3. Вышеизложенные выводы справедливы как при наличии, так и отсутствии узкополосных помех.

5.6. Прием многочастотных сигналов с относительной фазовой манипуляцией в многолучевых каналах

Проведем анализ помехоустойчивости приема, когда сообщение передается при помощи двоичных многочастотных сигналов с относительной фазовой манипуляцией каждой частотной составляющей

$$\underline{Z}_r(t) = \sum_{k=1}^{m'} (-1)^r e^{j\omega_k t}, r = 1, 2; t \in [(n-1)T, nT],$$

где $\omega_k = \omega_o + k\Delta\omega$; $\Delta\omega = 2\pi/T$; T – длительность элемента сигнала, m' – количество частотных составляющих в переданном составном сигнале.

Принятую смесь сигнала с помехами на входе приемника можно представить в виде

$$\underline{Z}'(t) = \underline{Z}_{rn}(t) + \underline{\xi}(t),$$

где $\underline{\xi}(t)$ – аддитивная помеха, аппроксимируемая белым гауссовским шумом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности ν^2 ;

$$\underline{Z}_{rn}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^m (-1)^r \mu_{qn} \exp\{j[\omega_k(t - \tau_{qn}) - \varphi_{qn}]\} \quad (5.6.1)$$

– принятый полезный сигнал на выходе Q – лучевого канала.

В (5.6.1) μ_{qn} – коэффициент передачи канала по q -му лучу на n -ом элементе сигнала; τ_{qn} – запаздывание q -го луча относительно первого. В дальнейшем запаздывание лучей на соседних элементах сигнала будем полагать одинаковыми

$$\tau_{qn} = \tau_q = (q-1)\Delta\tau.$$

При действии узкополосных помех в приемнике производится режекция частотных составляющих сигнала, пораженных помехами, поэтому в (5.6.1) под m подразумевается фактическое число частотных составляющих, оставшихся после режекции.

В зависимости от порядка суммирования выражение (5.6.1) можно записать двумя способами.

Способ 1.

$$\underline{Z}_{rn}(t) = \sum_{q=1}^Q \underline{\mu}_{qn} \underline{Z}_r(t - \tau_{qn}), \quad (5.6.2)$$

где

$$\underline{Z}_r(t - \tau_{qn}) = \sum_{k=1}^m (-1)^r \exp[j\omega_k(t - \tau_{qn})];$$

$\underline{\mu}_{qn} = \mu_{qn} e^{-j\phi_{qn}}$ – комплексный коэффициент передачи канала по q -му лучу на n -ом элементе сигнала. Ниже замирания отдельных лучей будем считать релеевскими некоррелированными, т. е.

$$\begin{aligned} \overline{\underline{\mu}_{qn}} &= 0, & \overline{\underline{\mu}_{qn} \underline{\mu}_{kn}^*} &= \sigma_c^2 \delta_{qk}, \\ \overline{\underline{\mu}_{qn} \underline{\mu}_{k(n+1)}^*} &= \rho \sigma_c^2 \delta_{qk}, \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

где δ_{qk} – символ Кронекера, $*$ – знак комплексного сопряжения,

ρ – коэффициент корреляции параметров сигнала.

Способ 2.

$$\underline{Z}_{rn}(t) = \sum_{k=1}^m \underline{\alpha}_{kn} \underline{Z}_{rk}(t), \quad (5.6.4)$$

где

$$\underline{Z}_{rk}(t) = (-1)^r e^{j\omega_k t}; \quad \underline{\alpha}_{kn} = \sum_{q=1}^Q \underline{\mu}_{qn} e^{-j\omega_k \tau_q}. \quad (5.6.5)$$

Из (5.6.5) с учетом (5.6.3) следует, что величины $\underline{\alpha}_{kn}$ имеют гауссовское распределение с нулевым средним, причем для равностоящих лучей одинаковой интенсивности

$$\overline{\underline{\alpha}_{pkn} \underline{\alpha}_{p(n+r)}^*} = \rho^r \sigma_c^2 Q B_{kp}, \quad r = 1, 2,$$

где \underline{B}_{kr} – элементы нормированной матрицы корреляции \mathbf{B} (5.5.16) коэффициентов α_{kn} , определяемые выражением (5.5.17).

Двум способам (5.6.2) и (5.6.4) представления сигнала соответствуют два метода приема: с разнесением по лучам и частотно-разнесенный. В условиях релейских замираний сигналов оптимальное, в смысле критерия максимального правдоподобия, решающее правило приема обоими методами определяется неравенством

$$\operatorname{Re} \left[\underline{U} (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G})^{-1} \underline{V}^+ \right] > 0. \quad (5.6.6)$$

Здесь «+» – знак комплексно-сопряженной операции транспонирования.

Для анализа помехоустойчивости от алгоритма (5.6.6) удобнее перейти к эквивалентному

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[(\underline{U} + \underline{V}) (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G})^{-1} (\underline{U} + \underline{V})^+ \right] > \\ & > \operatorname{Re} \left[(\underline{U} - \underline{V}) (\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{G})^{-1} (\underline{U} - \underline{V})^+ \right]. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Обозначения, используемые в (5.6.7), имеют следующий смысл.

1. Прием с разделением лучей:

\underline{U} , \underline{V} – комплексные Q -мерные векторы-столбцы с элементами

$$\underline{u}_{rq} = \frac{1}{\nu^2} \int_{\tau_q}^{T+\tau_q} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r^*(t - \tau_q) dt,$$

$$\underline{v}_{rq} = \frac{1}{\nu^2} \int_{T+\tau_q}^{2(T+\tau_q)} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_r^*(t - \tau_q) dt,$$

$$\mathbf{K} = \overline{[\underline{\mu}_n + \underline{\mu}_{(n+1)}][\underline{\mu}_n + \underline{\mu}_{(n+1)}]^+} = 2\sigma_c^2(1 + \rho)[\mathbf{I}],$$

где $\underline{\mu}_n^+ = \underline{\mu}_{1n}^*, \dots, \underline{\mu}_{Qn}^*$ – вектор-строка комплексно-сопряженных $\underline{\mu}_n$ величин;

$\underline{\mu}_n$ – вектор-столбец этих же величин; $[\mathbf{I}]$ – единичная матрица размером $Q \times Q$;

$$\mathbf{G} = \frac{E_c}{v^2} \mathbf{R}, \quad (5.6.8)$$

где

$$E_c = \frac{1}{2} \int_T |\underline{Z}_r(t)|^2 dt = mE_0;$$

\mathbf{R} – эрмитова матрица размером $Q \times Q$, определяющая разделимость сигналов, аналогичная (5.5.11).

2. Частотно-разнесенный прием:

\underline{U} , \underline{V} – комплексные m -мерные векторы – столбцы с элементами

$$\underline{u}_{rq} = \frac{1}{v^2} \int_0^T \underline{Z}'(t) \underline{Z}_{rk}^*(t) dt,$$

$$\underline{v}_{rq} = \frac{1}{v^2} \int_T^{2T} \underline{Z}'(t) \underline{Z}_{rk}^*(t) dt,$$

$$\mathbf{K} = \overline{[\underline{\alpha}_n + \underline{\alpha}_{(n+1)}]} [\underline{\alpha}_n + \underline{\alpha}_{(n+1)}]^+ = 2Q\sigma_c^2(1 + \rho)\mathbf{B},$$

где \mathbf{B} – эрмитова матрица размером $m \times m$, определяющая корреляцию между элементами сигнала, такая же, как в (5.5.16); \mathbf{G} – матрица размером $m \times m$, определяемая выражением (5.5.18).

Из (5.5.6), (5.5.7) следует, что для реализации оптимального алгоритма необходимо знание матриц \mathbf{K} и \mathbf{G} . В отсутствие априорных сведений об этих матрицах для приема можно использовать существенно более простой (субоптимальный) алгоритм

$$\text{Re}(\underline{U} \underline{V}^+) > 0. \quad (5.6.9)$$

Для анализа помехоустойчивости от алгоритма (5.6.9) перейдем к эквивалентному

$$\text{Re}[(\underline{U} + \underline{V})(\underline{U} + \underline{V})^+] > \text{Re}[(\underline{U} - \underline{V})(\underline{U} - \underline{V})^+] \quad (5.6.10)$$

При сделанных выше предположениях относительно свойств канала обе части неравенств (5.6.7) и (5.6.10) представляют собой статистически независимые квадратичные формы гауссовских величин с нулевыми средними, и вероятность ошибки можно вычислить по общей формуле (5.5.31)

$$p = \sum_{q_0=1}^{t_1} \frac{1}{(2\lambda_{1q_0})^{n_{1q_0}} (n_{1q_0} - 1)!} \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2\lambda_{1q_0}}} \left(\frac{d}{dy} \right)^{n_{1q_0} - 1} \left[\frac{\prod_{q=1}^{t_1} (1 + 2y\lambda_{1q})^{n_{1q}} - 1}{\prod_{k=1}^{t_2} (1 - 2y\lambda_{2k})^{n_{2k}} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq q_0}}^{t_1} (1 + 2y\lambda_{1q})^{n_{1q}} y} \right] \quad (5.6.11)$$

где λ_{rq} – собственные числа матрицы A_r (кратностью n_{rq}), представляющей собой произведение корреляционной матрицы элементов квадратичной формы K_r на матрицу преобразований квадратичной формы J_r ; t_q – число различных собственных чисел матрицы A_r ($r=1,2$).

Нетрудно показать, что для всех алгоритмов корреляционные матрицы элементов квадратичной формы одинаковы и равны

$$K_1 = I + (1 + \rho)\mathbf{H}, \quad K_2 = I + (1 - \rho)\mathbf{H}, \quad (5.6.12)$$

где $\mathbf{H} = h_0^2 m \mathbf{R}$ – для приема с разделением лучей и $\mathbf{H} = h_0^2 Q \mathbf{B}$ – для частотно-разнесенного приема; $h_0^2 = \overline{\sigma_c E_c} / \nu^2$ – отношение энергии одного элемента сигнала, переданного посредством одного луча, к спектральной плотности шума.

Матрицу преобразований квадратичной формы можно записать в виде

$$J = (K^{-1} + G)^{-1} = [I + (1 + \rho)\mathbf{H}]^{-1} (1 + \rho)\mathbf{H} \quad (5.6.13)$$

– для алгоритма (5.6.7);

$$J = [I] \quad (5.6.14)$$

– для алгоритма (5.6.10).

Из (5.6.12)–(5.6.14) находим матрицу $A_r = K_r J$ ($r=1,2$) для исследуемых алгоритмов

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 J = (I + \rho)\mathbf{H}, \\ A_2 &= K_2 J = [I + (1 - \rho)\mathbf{H}][1 + (1 + \rho)\mathbf{H}]^{-1} (1 + \rho)\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

– для алгоритма (5.6.7);

$$A_1 = K_1 J = [I + (1 + \rho)\mathbf{H}], \quad A_2 = K_2 J = [I + (1 - \rho)\mathbf{H}] \quad (5.6.16)$$

– для алгоритма (5.6.10).

Из (5.6.15), (5.6.16) следует, что собственные числа матрицы A_r можно выразить через собственные числа матрицы H . После несложных, но громоздких преобразований, получим

а) для оптимального алгоритма (5.6.7)

$$\lambda_{rk} = \frac{1 + [1 + (-1)^{r-1} \rho] \Lambda_k}{1 + (1 + \rho) \Lambda_k} (1 + \rho) \Lambda_k, \quad r = 1, 2; \quad (5.6.17)$$

б) для субоптимального алгоритма (5.6.10)

$$\lambda_{rk} = 1 + [1 + (-1)^{r-1} \rho] \Lambda_k, \quad r = 1, 2; \quad (5.6.18)$$

где Λ_k – собственные числа матрицы H , равные

$$\Lambda_k^{(\Lambda)} = h_0^2 \Lambda_k^{(\mathcal{R})} \quad (5.6.19)$$

– для приема с разделением лучей;

$$\Lambda_k^{(\varphi)} = h_0^2 \Lambda_k^{(\mathcal{B})} \quad (5.6.20)$$

– для частотно-разнесенного приема. Здесь $\Lambda_k^{(\mathcal{R})}$ и $\Lambda_k^{(\mathcal{B})}$ – собственные числа матриц $\mathcal{R} = m\mathbf{R}$ и $\mathcal{B} = m\mathbf{B}$.

Из (5.6.17)–(5.6.20) следует, что при передаче многочастотных ОФМ-сигналов по многолучевому каналу помехоустойчивость приема зависит от отношения энергии сигнала к спектральной плотности шума, а также от скорости изменения параметров канала и величины собственных чисел матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} . Качественно эти зависимости аналогичны кривым рис. 5.5.1. Сравнение помехоустойчивости методов приема с разделением лучей и частотно-разнесенного сводится к сравнению собственных чисел матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} . В параграфе 5.5 показано, что у этих матриц ненулевые собственные числа одинаковы. В соответствии с (5.6.19), (5.6.20) $\Lambda_k^{(\Lambda)} = \Lambda_k^{(\varphi)}$. Поэтому при использовании оптимального алгоритма (5.6.6) при произвольных Q и m оба метода приема обеспечивают одинаковую помехоустойчивость. При изменении $\Delta\omega\Delta\tau$ количество ненулевых собственных чисел изменяется от единицы до $F = \inf[Q, m]$.

Помехоустойчивость наиболее низка, если матрицы \mathcal{R} и \mathcal{B} имеют одно ненулевое собственное значение. При этом собственное значение матрицы H равно

$$\Lambda_1 = Qm\overline{h_0^2}. \quad (5.6.21)$$

Из (5.6.11) с учетом (5.6.17), (5.6.21) находим выражение для вероятности ошибки

$$p = \frac{1 + (1 - \rho) \overline{Qm h_0^2}}{2 + 2 \overline{Qm h_0^2}}. \quad (5.6.22)$$

Наиболее высокая помехоустойчивость приема реализуется в случае, когда матрицы \mathcal{R} и \mathcal{B} имеют F одинаковых собственных чисел

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_F = \frac{Qm}{F} \overline{h_0^2}. \quad (5.6.23)$$

Из (5.6.11) с учетом (5.6.17), (5.6.23) получим

$$p = \sum_{k=0}^{F-1} C_{F-1+k}^k \frac{[1 + (1 + \rho) \frac{Qm \overline{h_0^2}}{F}]^k [1 + (1 - \rho) \frac{Qm \overline{h_0^2}}{F}]^F}{(2 + 2 \frac{Qm \overline{h_0^2}}{F})^{F+k}}. \quad (5.6.24)$$

Как и для ЧМ-сигналов, при приеме многочастотных ОФМ-сигналов в Q -лучевом канале в зависимости от времени запаздывания между лучами вероятность ошибки изменяется от значений, определяющих помехоустойчивость в однолучевом канале, до значений, равных значениям вероятности ошибки при передаче сообщений по F независимым каналам. В отличие от ЧМ-сигналов характерной особенностью приема ОФМ-сигналов является зависимость вероятности ошибки от коэффициента корреляции ρ . Из (5.6.22), (5.6.24) видно, что при неограниченном увеличении энергии сигнала вероятность ошибки стремится не к нулю, а к предельному значению, определяемому скоростью изменения параметров сигнала. В частности, при медленных изменениях параметров канала ($\rho \approx 1$) из (5.6.24) следует выражение для предельной вероятности ошибки в форме

$$p = \frac{C_{2F-1}^F}{2^F} (1 - \rho)^F.$$

Как видно из (5.6.18), при использовании субоптимального алгоритма (5.6.9) помехоустойчивость приема определяется всеми собственными числами матриц \mathcal{R} и \mathcal{B} , в том числе и нулевыми. Поэтому при малых $\Delta\omega\Delta\tau$ помехоустойчивость субоптимального алгоритма ниже, чем оптимального, хотя и незначительно. Учитывая, что при приеме m – частотного сигнала в Q – лучевом канале матрицы \mathcal{R} и \mathcal{B} имеют различное количество нулевых собственных чисел, помехоустойчивость приема с разделением лучей и частотно-разнесенного оказывается различной. При $m > Q$ более помехоустойчивым является прием с

разделением лучей, при $m < Q$ – частотно-разнесенный. Это различие невелико и имеет место при малых значениях $\Delta\omega\Delta\tau$ (смотри рис. 5.5.3). Преимущество частотно-разнесенного приема заключается в том, что для его реализации не нужно измерять величину запаздывания между лучами.

5.7. Оценка частоты узкополосных помех

Вышеприведенные алгоритмы получены в предположении известной функции $Z_{mi}(t)$ и известного количества узкополосных помех. В общем случае они неизвестны, их нужно оценить. В частности, могут быть неизвестны средние частоты узкополосных помех. Вопросам оценки неизвестной частоты сигнала уделялось большое внимание, например в работах [19, 38, 204]. Воспользуемся результатами этих работ для рассмотрения возможных методов оценки частоты узкополосных помех. Оценку частоты узкополосных помех целесообразно проводить до начала сеанса связи в отсутствие полезного сигнала с помощью классифицированной обучающей выборки помех (2.2.5). Представим совокупность помех в виде

$$\mathfrak{x}(t) = \sum_{i=1}^{N_{II}} \mu_{mi} \sin(\omega_{mi}t + \varphi_i) + \xi(t), \quad t \in NT, \quad (5.7.1)$$

где ω_{mi} – средняя частота i -й узкополосной помехи.

Функционал отношения правдоподобия обучающей выборки помех определяется выражением

$$\mathcal{F}(\mathfrak{x}^{(N)} / \omega_{mi}, \varphi_i) = \exp \left\langle \frac{2}{v^2} \int_0^{NT} \{ \mathfrak{x}(t) \sum_{i=1}^{N_{II}} \mu_{mi} \sin(\omega_{mi}t + \varphi_i) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^{N_{II}} \mu_{mi} \sin(\omega_{mi}t + \varphi_i)]^2 \} dt \right\rangle. \quad (5.7.2)$$

Поскольку

$$\int_0^{NT} \sin^2(\omega_{mi}t + \varphi_i) dt = \frac{NT}{2} \left[1 - \frac{\sin^2(\omega_{mi}NT + \varphi_i) - \sin^2 \varphi_i}{2\omega_{mi}NT} \right], \quad (5.7.3)$$

то при $\omega_{mi}NT \gg 1$ можно пренебречь изменениями в (5.7.3) от ω_{mi} и φ_i и записать (5.7.2) так:

$$\mathcal{F}(\mathfrak{x}^{(N)} / \omega_{mi}, \varphi_i) = c \prod_{i=1}^{N_{II}} \exp \left[\frac{2\mu_{mi}}{v^2} \int_0^{NT} \mathfrak{x}(t) \sin(\omega_{mi}t + \varphi_i) dt \right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{N_{\Pi}} \mathcal{F}_i(\mathbf{x}^{(N)} / \omega_{\Pi i}, \varphi_i).$$

Здесь c — не зависящая от $\omega_{\Pi i}$ и φ_i величина.

Так как ищется оценка только $\omega_{\Pi i}$, то усредним каждое $\mathcal{F}_i(\cdot)$ по φ_i , полагая φ_i равномерно распределенной на интервале $(0 \dots 2\pi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\mathbf{x}^{(N)} / \omega_{\Pi i}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(\mathbf{x}^{(N)} / \omega_{\Pi i}, \varphi_i) W(\varphi_j) d\varphi_j = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{2\mu_{\Pi i}}{\nu^2} \sqrt{Z^2(\omega_{\Pi i}) + Y^2(\omega_{\Pi i})} \cos(\varphi_i - \arctg \frac{Y(\omega_{\Pi i})}{Z(\omega_{\Pi i})})\right] d\varphi_i, \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

где $Z(\omega_{\Pi i}) = \int_0^{NT} \mathbf{x}(t) \cos \omega_{\Pi i} t dt$; $Y(\omega_{\Pi i}) = \int_0^{NT} \mathbf{x}(t) \sin \omega_{\Pi i} t dt$.

После интегрирования в (5.7.4) имеем

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}^{(N)} / \omega_{\Pi i}) = c I_0 \left[\frac{2\mu_{\Pi i}}{\nu^2} \sqrt{Z^2(\omega_{\Pi i}) + Y^2(\omega_{\Pi i})} \right]. \quad (5.7.5)$$

Соотношение (5.7.5) позволяет получить оценку частоты $\hat{\omega}_{\Pi i}$ по критерию максимума апостериорной вероятности. Учитывая монотонность модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(\cdot)$, оценка $\hat{\omega}_{\Pi i}$ соответствует тому значению частоты, которое максимизирует величину

$$V(\omega_{\Pi i}) = \sqrt{Z^2(\omega_{\Pi i}) + Y^2(\omega_{\Pi i})}. \quad (5.7.6)$$

В [204] показано, что оценка $\hat{\omega}_{\Pi i}$ — несмещенная при $\overline{\mu_{\Pi i}^2} NT / \nu^2 \gg 1$.

Таким образом, устройство для получения оценки частоты узкополосных помех должно состоять из континуума обнаружителей вида (5.7.6) в полосе частот принимаемого сигнала. Реально достаточно иметь в устройстве оценки число таких блоков равным приблизительно базе сигнала. Это параллельный анализ спектра. Его недостаток в громоздкости вследствие необходимости большого числа корреляторов огибающей (фильтров). Наряду с параллельным анализом спектра известен последовательный, в котором используется один фильтр, но время анализа увеличивается в базу раз. Возможно комбинированное использование обоих методов, т. е. последовательно-параллельный анализ.

В целях упрощения технической реализации устройств оценки частоты ведутся поиски квазиоптимальных схем. Наиболее распространенным методом

получения квазиоптимальных устройств является их синтез в гауссовском приближении [163]. Следуя методике синтеза устройств в гауссовском приближении можно получить квазиоптимальный алгоритм оценки частоты в виде системы ФАПЧ второго порядка. К недостаткам системы ФАПЧ относится явление срыва слежения и, следовательно, случайное блуждание по частоте.

Для оценки частоты можно также использовать итеративные и рекуррентные алгоритмы, например, на основе метода Ньютона. При этом k -я итерация, определяющая очередное приближение к оценке максимального правдоподобия, определяется соотношением

$$\hat{\omega}_{\pi i}^{(k)} = \hat{\omega}_{\pi i}^{(k-1)} - \frac{\frac{\partial}{\partial \omega_{\pi i}} \mathcal{F}(\mathfrak{x}^{(N)} / \hat{\mu}_{c\pi i}, \hat{\mu}_{s\pi i}, \omega_{\pi i})}{\frac{\partial^2}{\partial \omega_{\pi i}^2} \mathcal{F}(\mathfrak{x}^{(N)} / \hat{\mu}_{c\pi i}, \hat{\mu}_{s\pi i}, \omega_{\pi i})}. \quad (5.7.7)$$

Формирование оценок в дискретном времени представляет известные вычислительные преимущества, поэтому функционал отношения правдоподобия обучающей выборки в (5.7.7) имеет вид

$$\mathcal{F}(\mathfrak{x}^{(N)} / \hat{\mu}_{c\pi i}, \hat{\mu}_{s\pi i}, \omega_{\pi i}) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^N \hat{\mu}_{c\pi i}^{(l)} \sum_{m=0}^M \mathfrak{x}^{(l)}(m\Delta t) \cos(\omega_{\pi i}^{(l)} m\Delta t) + \sum_{l=1}^N \hat{\mu}_{s\pi i}^{(l)} \sum_{m=0}^M \mathfrak{x}^{(l)}(m\Delta t) \sin(\omega_{\pi i}^{(l)} m\Delta t) \right\}.$$

Здесь Δt – шаг дискретизации; $m = 0, 1, 2, \dots, M$ – дискретные отсчеты на периоде T ;

$$\hat{\mu}_{c\pi i}^{(l)} = \frac{1}{ME_{\pi i}} \sum_{m=0}^M \mathfrak{x}^{(l)}(m\Delta t) \cos(\hat{\omega}_{\pi i}^{(l-1)} m\Delta t);$$

$$\hat{\mu}_{s\pi i}^{(l)} = \frac{1}{ME_{\pi i}} \sum_{m=0}^M \mathfrak{x}^{(l)}(m\Delta t) \sin(\hat{\omega}_{\pi i}^{(l-1)} m\Delta t)$$

– максимально правдоподобные оценки квадратурных составляющих коэффициента передачи канала для i -й узкополосной помехи на одном интервале обучения.

Оценка частоты узкополосных помех (5.7.7) – асимптотически гауссовская, число итераций алгоритма определяется степенью сходимости дисперсии оценки к своей нижней границе. Ею определяется допустимое ухудшение помехоустойчивости приема. Моделированием на ЭВМ показано, что при $\bar{h}_{\pi}^2 \geq 10$ приемлемая точность формирования оценки частоты узкополос-

ных помех имеет место уже на интервале порядка 10 шагов обучения.

При неизвестном числе воздействующих узкополосных помех анализатор спектра дополняется классификатором, который ведет классификацию помех по степени опасности в смысле увеличения вероятности ошибочного приема полезного сигнала. В простейшем случае можно вести классификацию помех по мощности на соответствующих частотах. Таким образом, в общем случае приемник должен содержать анализатор помеховой обстановки, классификатор и подавитель узкополосных помех. Подавитель состоит из устройства формирования оценки узкополосных помех и вычитающего устройства.

6. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ С УЗКОПОЛОСНЫМИ ПОМЕХАМИ

Прием сигналов в условиях воздействия совокупности узкополосных помех, когда неизвестно их количество и взаимное частотное расположение, возможен при использовании процедуры цифрового спектрального анализа принятого сигнала [107, 123, 193, 217, 282 и др.].

6.1. Методы спектрального оценивания помеховой обстановки

Спектральное оценивание на основе преобразования Фурье

Спектральное оценивание временной реализации, основанное на преобразовании Фурье, получило широкое распространение благодаря эффективному в вычислительном отношении алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ). Этот же алгоритм позволяет подавлять узкополосные помехи на входе радиоприемного устройства. Достоинства и недостатки применения методов спектрального оценивания для подавления помех рассмотрим в данном параграфе.

Пусть $x(k) = x(k\Delta t)$ – временная последовательность входного сигнала поддается аналого-цифровому преобразованию. Для простоты записи будем считать $\Delta t = 1$. Оценка спектра, полученная преобразованием Фурье временной реализации, записывается в виде

$$\hat{S}(m\Delta f) = \hat{S}\left(\frac{m}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} mk\right), \quad (6.1.1)$$

где N – объем временной выборки $x(k)$;

$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{1}{N}$ – разрешающая способность анализатора по частоте.

За оценку спектральной плотности мощности (СПМ), вычисляемую непосредственно по временной реализации, принимают квадрат модуля текущего спектра (6.1.1), нормированный относительно длины выборки N :

$$\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \hat{S}\left(\frac{m}{N}\right) \right|^2 = \frac{1}{N} \left\{ \left[\operatorname{Re} \hat{S}\left(\frac{m}{N}\right) \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \hat{S}\left(\frac{m}{N}\right) \right]^2 \right\}. \quad (6.1.2)$$

Оценка СПМ, вычисленная по (6.1.1), (6.1.2), носит название периодограммы. Для случайного сигнала $x(k)$ оценка $\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right)$ является случайной, изменяющейся от одной реализации $x(k)$ к другой. Причем оценка (6.1.2) является смещенной, несостоятельной и неэффективной. Смещение оценки определяется выражением

$$b \left\{ \hat{P} \left(\frac{m}{N} \right) \right\} = \frac{1}{24} \frac{1}{N^2} P^* \left(\frac{m}{N} \right), \quad (6.1.3)$$

т. е. зависит от числа точек БПФ (разрешающей способности) и второй производной истинной СПМ. Дисперсия оценки прямо пропорциональна количеству точек БПФ и обратно пропорциональна числу усредняемых периодограмм (M):

$$D \left\{ \hat{P} \left(\frac{m}{N} \right) \right\} = \frac{N}{M} = \frac{1}{\Delta f M}. \quad (6.1.4)$$

Как видно из выражений (6.1.3) и (6.1.4), при постоянной длительности временной реализации одновременное уменьшение смещения и дисперсии невозможно. В качестве компромисса часто используют минимизацию среднеквадратической ошибки

$$\Delta \left\{ \hat{P} \left(\frac{m}{N} \right) \right\} = \sqrt{b^2 \{ \} + D \{ \}}. \quad (6.1.5)$$

Однако использование критерия (6.1.5) в связи с отсутствием априорных сведений о истинной СПМ также затруднено.

Спектральное оценивание посредством преобразования Фурье корреляционной функции получило широкое распространение, т. к. оно вытекает из классической теории статистического оценивания (теорема Винера–Хинчина). Как известно, эта теорема справедлива для стационарных, случайных эргодических процессов.

Для ограничения временной выборки $x(k)$ можно определить оценку корреляционной функции в виде

$$\hat{R}'(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k+n)x(k), \quad (6.1.6)$$

где $n=0,1,\dots,N-1,N$ – объем выборки $x(k)$.

Часто вместо оценки (6.1.6) используется оценка

$$\hat{R}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k+n)x(k), \quad (6.1.7)$$

которая хотя является смещенной, но имеет меньшую дисперсию, чем оценка (6.1.6).

Согласно теореме Винера–Хинчина, оценка спектральной плотности мощности процесса определяется:

$$\hat{P} \left(\frac{m}{N} \right) = \sum_{n=-M}^M \hat{R}(n) \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} nm \right), \quad (6.1.8)$$

где $M \leq N-1$ – число отсчетов корреляционной функции.

Вследствие того, что корреляционная функция является четной, оценка СПМ будет действительной, т. е. фактически необходимо вычислять только проекции $R(n)$, что, конечно же, упрощает вычисления:

$$\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right) = 2 \sum_{n=0}^M \hat{R}(n) \cos\left(2 \frac{2\pi}{N} nm\right). \quad (6.1.9)$$

Однако это уменьшение объема вычислений «компенсируется» тем, что приходится на первом этапе анализа вычислять оценку корреляционной функции. Все-таки для некоторых видов случайных процессов корреляционная функция является быстро убывающей с увеличением n , и количество отсчетов корреляционной функции (M), которые можно считать значащими, намного меньше количества временных отсчетов (N) входной реализации $x(k)$. В этом случае реальная разрешающая способность спектроанализатора определяется не длиной выборки $x(k)$, а временем корреляции, т. е. величиной M .

Для интерполирования СПМ в точках между отсчетами $\hat{P}\left\{\frac{m}{M}\right\}$ корреляционную функцию дополняют нулями, например до значения $M' = N$. Это дает более сглаженную оценку СПМ, в то время как дополнение нулями незначительно усложняет вычисления.

Смещение оценки СПМ, вычисленной по (6.1.9), при условии, что $\hat{R}(n) = R'(n)$, совпадает с формулой (6.1.3).

Дисперсия оценки корреляционной функции определяется выражением

$$D\left\{\hat{R}(n)\right\} \equiv \frac{1}{f_a T} = \frac{1}{\Delta f N T}. \quad (6.1.10)$$

Учитывая, что

$$D\left\{\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right)\right\} \equiv \frac{1}{\Delta f T}, \quad (6.1.11)$$

можно выразить дисперсию оценки СПМ через дисперсию оценки корреляционной функции:

$$D\left\{\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right)\right\} = D\left\{\hat{R}(n)\right\} N. \quad (6.1.12)$$

Отсюда видно, что дополнение нулями корреляционной последовательности с целью сглаживания СПМ значительно увеличивает дисперсию оценки. Это определяет три существенных недостатка методов спектрального анализа, основанных на БПФ.

Оценки СПМ, полученные методом БПФ, не являются эффективными и состоятельными, т. е. даже при увеличении времени наблюдения (T) до бесконечности дисперсия оценки СПМ не стремится к нулю.

Частотное разрешение БПФ ограничено длиной входной реализации $x(k)$, т. е. разрешающая способность жестко связана с длительностью наблюдения (T).

Наблюдается искажение СПМ за счет так называемого эффекта Гиббса. Этот эффект в частотной области приводит к неприятным последствиям: подавлению главных лепестков слабых сигналов боковыми лепестками сильных сигналов (эффект маскирования).

Поэтому периодограммы нельзя считать оценками СПМ. В качестве оценки СПМ необходимо принять математическое ожидание периодограммы или, как делается на практике, его выборочную характеристику – арифметическое среднее. Практически это означает, что периодограммы (6.1.2) или выборочные спектры (6.1.9) необходимо усреднять по большому числу реализаций, т. е.

$$\bar{P}_0\left(\frac{m}{N}\right) = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \hat{P}_q\left(\frac{m}{N}\right). \quad (6.1.13)$$

Часто на практике удобно иметь рекуррентную формулу для усреднения периодограммы:

$$\bar{\hat{P}}_q = \bar{\hat{P}}_{q-1} + \frac{\hat{P}_q - \bar{\hat{P}}_{q-1}}{q}. \quad (6.1.14)$$

Такое усреднение называется линейным. Дисперсия оценки СПМ при линейном усреднении убывает обратно пропорционально числу усредняемых периодограмм:

$$D\left\{\bar{\hat{P}}_q\right\} = \frac{D\left\{\hat{P}_q\right\}}{q}, \quad q=1,2,\dots,M. \quad (6.1.15)$$

Оценка (6.1.14) является несмещенной, но, как известно из статистической радиотехники, не все несмещенные оценки являются эффективными, т. е. имеющими наименьшую дисперсию. В частности, меньшей дисперсией обладает оценка СПМ, получаемая усреднением периодограммы, при котором первые периодограммы дают наименьший вклад в общий результат. Такое усреднение называется экспоненциальным или скользящим средним:

$$\bar{\hat{P}}_q = \bar{\hat{P}}_{q-1} + \frac{\hat{P}_q - \bar{\hat{P}}_{q-1}}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{k=q} \left(\frac{M-1}{M}\right)^{q-k} \hat{P}_k. \quad (6.1.16)$$

Для больших значений (M) коэффициент $(M - 1/M)^{q-k}$ стремится к значению $\exp(-(q-k)/M)$, поэтому усреднение (6.1.16) называют экспоненциальным усреднением.

Оценка СПМ, получаемая в результате процедуры (6.1.16), является смещенной. Величина смещения определяется выражением

$$b \left\{ \overline{\hat{P}}_q \right\} = P \left(\frac{M-1}{M} \right)^q \quad (6.1.17)$$

и при неограниченном увеличении M стремится к значению $P/l \approx 0,368P$, что обязательно необходимо учитывать. Однако дисперсия оценки (6.1.16) уменьшается с увеличением M в два раза быстрее, чем при линейном усреднении. В некоторых анализаторах на начальном участке работы используется линейное усреднение, которое затем переходит в скользящее усреднение.

Совместное использование весового окна и усреднения имеет особенности, связанные с коррелированностью «соседних» периодограмм. Для уменьшения корреляции используют либо специальные виды весового окна, либо отдельные реализации разбивают так, чтобы корреляция перекрывающихся участков была минимальна. В любом случае при этом неизбежна некоторая потеря информации. К недостаткам методов БПФ нужно отнести также эффект «частотокола», связанный с тем, что при попадании какой-либо спектральной линии на середину между отсчетами БПФ оценка этой спектральной линии уменьшается (в предельном случае в $\pi/2$ раз).

Любая обработка сигналов является процессом, имеющим конечную длительность. Это равносильно умножению этой реализации на прямоугольную функцию, называемую прямоугольным (или естественным) временным окном, т. е.

$$\hat{P} \left(\frac{m}{n} \right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) x(k) \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} km \right) \right|^2, \quad (6.1.18)$$

где

$$w(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, N-1 \quad (t \in \overline{0, T}) \\ 0, & k < 0, k > N-1. \end{cases} \quad (6.1.19)$$

Временному окну $w(k)$ в частотной области соответствует спектральное окно $W \left(\frac{m}{N} \right) = W(m\Delta f)$. В частности, для окна (6.1.19)

$$W \left(\frac{m}{N} \right) = \frac{\sin \pi m / N}{\pi m / N}. \quad (6.1.20)$$

Как известно, функция $\sin x/x$ имеет значительные боковые лепестки, которые медленно уменьшаются с ростом m . Это приводит к просачиванию энергии в соседние и далеко отстоящие спектральные отсчеты, т. е. к маскированию слабых спектральных линий. Для уменьшения этих вредных явлений в качестве окон $w(k)$ используются функции, имеющие в центре интервала $0 \dots T$ максимум и медленно спадающие до 0 к краям интервала, т. е. функции, симметричные относительно середины интервала $0 \dots T$.

Чаще для выбора того или иного окна $w(k)$ предъявляют соответствующие требования к его преобразованию Фурье, т. е. к спектральному окну $W(m/N)$. В частности, основными требованиями к спектральному окну $W(m\Delta f)$ являются следующие:

- спектральное окно должно иметь возможно более узкий центральный пик;
- число боковых выбросов должно быть небольшим, а их амплитуда малой, т. е. скорость спада боковых лепестков должна быть как можно большей;
- отрицательные выбросы, если это возможно, должны отсутствовать;
- формула для вычисления окна должна быть по возможности простой.

Перечисленные требования во многом противоречивы. В настоящее время синтезировано множество различных весовых окон, удовлетворяющих тому или иному критерию или комплексу критериев. В любом случае выбор оптимального весового окна определяется априорной информацией о сигнале и помехах, задачами приема (обнаружение или оценка), а также требованием к точности обработки и скорости вычислений. Для линейчатых спектров (к ним относятся спектры узкополосных помех) наиболее приемлемыми являются следующие весовые окна:

– Хэмминга

$$w\left(\frac{m}{N}\right) = 0,54 + 0,46 \cos\left(2\pi \frac{m-1}{N}\right), \quad (6.1.21)$$

– Блэкмана

$$w\left(\frac{m}{N}\right) = 0,42 + 0,5 \cos\left(2\pi \frac{m-1}{N}\right) + 0,08 \cos\left(4\pi \frac{m-1}{N}\right), \quad (6.1.22)$$

имеющие следующие характеристики:

- ширина основного лепестка на уровне 3 дБ: 1,3 и 1,68 соответственно;
- уровень первого бокового лепестка –43 дБ и –58 дБ соответственно.

Для сравнения: ширина основного лепестка для прямоугольного окна равна 0,88 (в относительных единицах), а уровень первого бокового лепестка –13 дБ.

Методы преобразования Фурье можно с успехом использовать для цифровой фильтрации известных сигналов. Однако эти же методы пригодны и для анализа спектров неизвестных сигналов. Объединяя решение этих задач в одном устройстве, можно построить адаптивный блок защиты от узкополосных помех. Для этого на первом этапе (этапе обучения) по обучающей выборке $x^{об}(k)$ оценивается СПМ узкополосных помех

$$\hat{P}_n\left(\frac{m}{N}\right) = \frac{1}{N_{o\delta}} \left| \sum_{k=0}^{N_{o\delta}-1} w^{o\delta}(k) x^{o\delta}(k) \exp\left(-j2\pi/N km\right) \right|. \quad (6.1.23)$$

Если необходимо, то оценка (6.1.23) усредняется по нескольким реализациям $x_q^{o\delta}(k)$ в соответствии с алгоритмом (6.1.14) либо (6.1.16). Оценка СПМ узкополосных помех записывается в ОЗУ ЦВМ. Далее идет прием и обработка полезного сигнала. Вычисляется преобразование Фурье смеси сигнала с помехой и шумом:

$$\hat{P}_{cm}\left(\frac{m}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} w(k) x_{cm}(k) \exp\left(2\pi/N km\right) \right|^2. \quad (6.1.24)$$

Затем вычисляется произведение оценки СПМ узкополосных помех (6.1.23), преобразование Фурье смеси (6.1.24) и преобразование Фурье известного сигнала

$$\hat{P}_r\left(\frac{m}{N}\right) = \hat{P}_n^{-1}\left(\frac{m}{N}\right) \hat{P}_{cm}\left(\frac{m}{N}\right) \hat{P}_{cr}\left(\frac{m}{N}\right). \quad (6.1.25)$$

Для вычисления этого произведения массивы (6.1.23) и (6.1.24) должны иметь одинаковую размерность, для чего при вычислении массива (6.1.23) реализация $x^{o\delta}(k)$ дополняется нулями до $N_{o\delta} = N$. Для принятия решения о передаваемом сигнале можно использовать как непосредственно произведение $\hat{P}\left(\frac{m}{N}\right)$ (6.1.25), так и его обратное преобразование Фурье (БПФ):

$$\hat{R}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{P}_r\left(\frac{m}{N}\right) \exp\left(j2\pi/N mn\right), \quad (6.1.26)$$

которое является корреляционной функцией входной смеси, с учетом режектированных узкополосных помех. Как известно, эта функция является достаточной статистикой и равна выходному сигналу оптимального приемника, рассчитанного на прием сигналов в белом шуме. Для принятия решения о передаче g -го варианта сигнала необходимо сравнить статистику (6.1.26) с порогом, учитывая априорные сведения о сигнале и оценку узкополосных помех.

Спектральное оценивание на основе авторегрессионного процесса со скользящим средним

Наряду с вышеописанными методами достаточно широко применяются методы спектрального оценивания, основанные на аппроксимации временной реализации исследуемого сигнала. Многие детерминированные и случайные

последовательности сигналов, с которыми приходится иметь дело на практике, могут быть достаточно хорошо аппроксимированы выходным сигналом линейного дискретного фильтра. При этом выходная последовательность $\{x_n\}$ и входная последовательность $\{\xi_n\}$ используются для моделирования данных, связанных линейным уравнением

$$x_n = \sum_{l=0}^q \theta_l \xi_{n-l} - \sum_{k=1}^P a_k x_{n-k}. \quad (6.1.27)$$

Эта наиболее общая линейная модель называется АРСС-моделью (модель процесса авторегрессии со скользящим средним).

Как правило, в задачах спектрального оценивания сигнал $\{\xi_n\}$ представляет собой последовательность отсчетов белого шума с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Если все коэффициенты θ_l , за исключением θ_0 , равны 0, то

$$x_n = -\sum_{k=1}^P a_k x_{n-k} + \xi_n, \quad (6.1.28)$$

и процесс $\{x_n\}$ называется АР-процессом порядка P . Согласно теореме декомпозиции Уолда, любой АРСС-процесс с конечной дисперсией можно представить единственной АР-моделью, возможно, бесконечного порядка. Поскольку оценивание параметров АР-модели приводит к линейным уравнениям, то она имеет вычислительные преимущества перед методами оценивания параметров АРСС-моделей.

При использовании АР-модели оценку СПМ АР-процесса можно получить в виде

$$S(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \sum_{k=1}^P a_k \exp(-j2\pi f k \Delta t) \right|^2}. \quad (6.1.29)$$

Таким образом, для получения оценки СПМ необходимо оценить значения параметров АР-модели $\{a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2\}$. Если корреляционная функция (КФ) $R_{xx}(k)$ анализируемой последовательности x известна или заранее оценена, то значения параметров АР-модели и КФ будут связаны системой линейных уравнений

$$R_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^P a_l R_{xx}(k-l), k > 0 \\ -\sum_{l=1}^P a_l R_{xx}(k-l) + \sigma^2, k = 0, \end{cases} \quad (6.1.30)$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \dots & R_{xx}(-P) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(-P+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xx}(P) & R_{xx}(P-1) & \dots & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1.31)$$

Эти уравнения называют уравнениями Юла-Уокера. Для определения АР-параметров модели необходимо решить систему линейных уравнений (6.1.31) относительно $(P+1)$ неизвестных коэффициентов $\{a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2\}$.

Решение уравнений (6.1.31) возможно различными методами. В частности, к данным уравнениям можно применить метод гауссова исключения, однако приблизительное число вычислительных операций в этом случае равно P^3 , что при значительных величинах P неприемлемо.

Алгоритм Левинсона-Дербина

Так как матрица $R_{xx}(k)$ – симметричная, то существует эффективный алгоритм решения системы уравнений (6.1.31) – алгоритм Левинсона. Этот алгоритм позволяет рекурсивно вычислять набор параметров:

$\{a_{11}, \sigma_1^2\}, \{a_{21}, a_{22}, \sigma_2^2\}, \dots, \{a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p^2\}$, где дополнительный индекс введен для обозначения порядка АР-процесса.

Алгоритм Левинсона инициализируется коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -R_{xx}(1)/R_{xx}(0) \\ \sigma_1^2 &= \left(1 - |a_{11}|^2\right) R_{xx}(0) \end{aligned} \right\}, \quad (6.1.32)$$

а рекурсии для $K = 2, 3, \dots, P$ вычисляются с помощью выражений:

$$\left. \begin{aligned} a_{kk} &= - \left[R_{xx}(k) + \sum_{l=1}^{k-1} a_{k-1,l} R_{xx}(k-l) \right] / \sigma_{k-1}^2, \\ a_{ki} &= a_{k-1,i} + a_{kk}^* a_{k-1,k-i}, \\ \sigma^2 &= (1 - |a_{kk}|^2) \sigma_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.33)$$

Алгоритм Левинсона имеет следующие преимущества по сравнению с другими методами решения системы (6.1.31):

– поскольку параметры вычисляются по рекуррентным формулам, то до определения параметров АР-модели порядка P рассчитываются параметры АР-моделей более низких порядков; это весьма полезное свойство в тех случаях, когда значение P заранее неизвестно;

– в ходе вычислений легко контролировать необходимое и достаточное условие устойчивости АР-модели:

$$|a_{ll}| < 1, \quad l = 1, 2, \dots, P;$$

– для параметров АР-модели порядка P требуется выполнить примерно P^2 арифметических операций.

Алгоритм Берга

Часто при спектральном оценивании значения КФ $R_{xx}(k)$ неизвестны. В этом случае определение параметров АР-модели необходимо выполнять, располагая только отсчетами $x(n)$ анализируемого процесса. Наиболее популярным методом оценивания АР-параметров по отсчетам данных является алгоритм Берга, который можно рассматривать как процедуру минимизации методом наименьших квадратов:

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[|l_{pn}|^2 + |e_{pn}|^2 \right], \quad (6.1.34)$$

при ограничении, что параметры АР-модели должны удовлетворять рекурсивному уравнению Левинсона

$$a_{pn} = a_{p-1,k} + a_{pp}^* a_{p-1,p-k}.$$

В (6.1.34) величины l_{pn} и e_{pn} представляют собой ошибки линейного предсказания соответственно вперед и назад:

$$\left. \begin{aligned} l_{pn} &= x_n - \hat{x}_n = x_n + \sum_{k=1}^P a_{pk} x_{n-k} = \sum_{k=0}^P a_{pk} x_{n-k} \\ \vartheta_{pn} &= x_{n-p} - \hat{x}_{n-p} = x_{n-p} + \sum_{k=1}^P a_{pk}^* x_{n-p+k} = \sum_{k=0}^P a_{pk}^* x_{n-p+k} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.35)$$

Приравняв к нулю производную E_p по a_{ii} , получим выражение для расчета параметров:

$$a_{ii} = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} \vartheta_{i-1, k-1}^* l_{i-1, k}}{\sum_{k=i}^{N-1} \left(|l_{i-1, k}|^2 + |\vartheta_{i-1, k-1}|^2 \right)}. \quad (6.1.36)$$

Недостатками алгоритма Берга являются расщепление спектральных линий и смещение спектральных оценок по частоте.

Эти недостатки можно значительно сгладить, проведя минимизацию ошибки предсказания E_p по всем АР-параметрам от a_{p1} до a_{pp} . При этом требуется примерно на 20 % больше вычислений, однако улучшение конечных результатов значительно перевешивает затраты на дополнительные вычисления.

*Оценивание на основе аппроксимации набором синусоид
(алгоритм Писаренко)*

Если случайный процесс (помеховая обстановка) состоит из смеси синусоид и аддитивного белого шума, то его можно рассматривать как частный случай АРСС-процесса, у которого порядок АР- и СС-процессов равны. Этот АРСС-процесс обладает частным видом симметрии, в результате чего АР-параметры оказываются идентичными СС-параметрам модели.

Наблюдаемый процесс Y_n , состоящий из смеси P синусоид и шума, имеет вид

$$y_n = x_n + w_n = -\sum_{m=1}^{2P} a_m x_{n-m} + w_n. \quad (6.1.37)$$

Если корреляционная функция (КФ) процесса Y_n известна, то АРСС-параметры можно найти из решения уравнения

$$\mathbf{R}_{yy} \mathbf{A} = \sigma_w^2 \mathbf{A}, \quad (6.1.38)$$

где

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(-2P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{yy}(2P) & \dots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} - \text{корреляционная матрица процесса } V_n;$$

$\mathbf{A}^T = [1, a_1, \dots, a_{2P}]$ – вектор АРСС-параметров.

Уравнение (6.1.38) представляет собой собственно уравнение процесса, в котором дисперсия шума σ_w^2 является собственным значением автокорреляционной матрицы \mathbf{R}_{yy} , а вектор АРСС-параметров \mathbf{A} является собственным вектором, связанным с собственным значением σ_w^2 и пронормированным так, чтобы первый элемент был равен 1.

Если число синусоид в смеси не известно, то уравнение (6.1.38) необходимо решать для последовательно возрастающих порядков P до тех пор, пока минимальное собственное значение \mathbf{R}_{yy} перестанет изменяться при переходе к следующему более высокому порядку. Это будет означать достижение правильного порядка. Этот алгоритм носит название алгоритма Писаренко. Достоинством алгоритма Писаренко является то, что в данной модели предполагается, что помехи между собой не коррелированы. Недостаток этого алгоритма заключается в его низкой эффективности при высоком уровне шума.

*Оценивание на основе аппроксимации набором затухающих экспонент
(алгоритм Прони)*

Модель, используемая в данном алгоритме, представляет собой набор из P экспоненциальных функций с произвольными амплитудами, частотами и фазами:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^P \varrho_m Z_m^n, \quad (6.1.39)$$

где величины ϱ_m и Z_m полагаются комплексными:

$$\varrho_m = A_m \exp(j\Theta_m),$$

$$Z_m = \exp\left[(a_m + j2\pi f_m)\Delta t\right].$$

Вычисление параметров $\{A_m, a_m, f_m, \Theta_m\}$ по минимуму среднеквадратической ошибки

$$E = \sum_{n=0}^{-N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2$$

представляет собой нелинейную задачу аппроксимации по методу наименьших квадратов. Решение включает итеративный процесс, посредством которого первоначально принятые оценки значений этих параметров постепенно улучшаются.

Если предположить, что аппроксимирующая функция имеет форму

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^P A_m \exp(a_m |t|) \exp[j(2\pi f_m t + \Theta_m)], \quad (6.1.40)$$

то для вещественного процесса $X(t)$ потребуется вычисление комплексно-сопряженных пар чисел

$$\exp[j(2\pi f_m t + \Theta_m)] \quad \text{и} \quad \exp[-j(2\pi f_m t + \Theta_m)].$$

В этом случае выражение для энергетической спектральной плотности, основанное на преобразовании Фурье для (6.1.40), записывается в виде

$$S(f) = |\hat{X}(f)|^2, \quad (6.1.41)$$

где

$$\hat{X}(f) = \sum_{m=1}^P A_m \exp(j\Theta_m) \frac{2a_m}{a_m^2 + [2\pi(f - f_m)]^2}. \quad (6.1.42)$$

Энергетический спектр, полученный по алгоритму Прони, обладает способностью формировать как узкополосные, так и широкополосные спектральные линии, форма которых зависит от величины коэффициента затухания. Кроме того, алгоритм Прони обеспечивает получение информации о фазе, которая теряется при стандартном спектральном АР-оценивании.

По сравнению с алгоритмом Писаренко метод Прони имеет несколько преимуществ:

- 1) не требуется получать оценки значений КФ;
- 2) меньшее число ложных спектральных линий;
- 3) меньшие значения смещений оценок частоты и мощности;
- 4) отсутствуют боковые лепестки.

Кроме того, реализация алгоритма Прони несколько проще в вычислительном отношении.

Во всех рассмотренных алгоритмах спектрального оценивания предполагалось, что порядок модели, аппроксимирующей наблюдаемую помеховую обстановку, априорно известен. В реальной ситуации порядок модели необходи-

мо задать. При этом необходимо учитывать следующие обстоятельства. При слишком низком порядке модели получаются сильно сглаженные спектральные оценки. При слишком высоком – в спектре появляются ложные спектральные составляющие. Интуитивно ясно, что следует увеличивать порядок модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигает минимума. Однако с увеличением порядка модели мощность ошибок предсказания монотонно уменьшается. Следовательно, мощность ошибки предсказания не может служить достаточным критерием окончания процедуры обучения.

Известно несколько целевых критериев для выбора порядка АР-модели.

1. Критерий окончательной ошибки предсказания (ООП):

$$ООП_p = E_p \frac{N + P + 1}{N - P - 1}, \quad (6.1.43)$$

где N – число отсчетов данных.

Выбираемый порядок модели равен величине P , при котором величина ООП минимальна.

Для АР-процессов этот критерий обеспечивает хорошие результаты. Однако при обработке реальных данных помеховой обстановки критерий ООП приводит к выбору слишком малого порядка модели.

2. Информационный критерий Аканке (ИКА).

Согласно этому критерию, порядок модели выбирается посредством минимизации функции:

$$ИКА_p = \ln E_p + 2 \frac{P + 1}{N}. \quad (6.1.44)$$

Второй член в (6.1.44) характеризует «плату» за использование дополнительных АР-коэффициентов.

Здесь также выбирается тот порядок модели, при котором величина ИКА минимальна.

При выполнении $N \rightarrow \infty$ критерии ООП и ИКА эквивалентны.

3. Критерий авторегрессионной передаточной функции (КАПФ).

Порядок модели (P) выбирается в этом случае равным порядку, при котором разность среднеквадратичных ошибок между истинным, предсказывающим ошибку фильтром и оценкой этого фильтра минимальна. Эту разность можно вычислить, даже если истинный предсказывающий ошибку фильтр точно не известен:

$$КАПФ_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^P \frac{1}{\hat{E}_i} - \frac{1}{\hat{E}_p}, \quad (6.1.45)$$

где $\hat{E}_i = \frac{N}{N - i} E_i$.

Результаты спектрального оценивания помеховой обстановки при использовании трех указанных критериев мало отличаются друг от друга, особенно в случаях реальных данных, а не моделируемых АР-процессов. Однако в случае коротких записей данных помеховой обстановки ни один из этих критериев не обеспечивает удовлетворительных результатов. Поэтому в этих случаях предлагается выбирать порядок модели в пределах от $N/3$ до $N/2$.

*Адаптивные алгоритмы вычисления АРСС-параметров
(решетчатые фильтры)*

Рассмотрим еще один метод спектрального оценивания помеховой обстановки. Он основан на использовании свойств решетчатых структур. Многие методы адаптивной обработки сигналов, основанные на моделировании рассматриваемых процессов в виде выходного сигнала линейной системы конечного порядка с дискретным временем, возбуждаемой белым шумом (процессы АРСС), базируются на решении следующей задачи линейного предсказания.

Пусть V_T – скалярный, стационарный дискретный процесс с нулевым средним. Необходимо предсказать текущее значение этого процесса по данным измерений, произведенных ранее. Линейный фильтр предсказания порядка N будет описываться соотношением

$$\hat{Y}_{T/T-1} = \sum_{i=1}^N A_{N,i} Y_{T-i}, \quad (6.1.46)$$

где $\hat{Y}_{T/T-1}$ – предсказанное значение V_T по данным, полученным к моменту времени $T-1$, $A_{N,i}$ – коэффициенты фильтра предсказания. Ошибка предсказания порядка N (разность между фактическим и предсказанным значением процесса):

$$\varepsilon_{N,T} = V_T - \hat{Y}_{T/T-1} = V_T + \sum_{i=1}^N A_{N,i} Y_{T-i}. \quad (6.1.47)$$

Используя Z -преобразование, выражение (6.1.47) можно записать в виде

$$\varepsilon_{N,T} = A_N(\mathcal{Z}) V_T, \quad (6.1.48)$$

где $A_N(\mathcal{Z}) = 1 + A_{N,1} \mathcal{Z}^{-1} + \dots + A_{N,N} \mathcal{Z}^{-N}$, $\mathcal{Z}^{-1} V_T = V_{T-1}$.

Оптимальный по критерию наименьших квадратов фильтр предсказания минимизирует средний квадрат ошибки $E\{\varepsilon_{N,T}^2\}$. Коэффициенты $A_{N,i}$, такого

оптимального фильтра определяются статистиками процесса V_T второго порядка, т. е. коэффициентами корреляции $\{R_i, i = 0, \dots, N\}$, где $R_i = E\{V_T V_{T-i}\}$. Эти коэффициенты можно найти, решая систему линейных уравнений Юла–Уокера. Линейному фильтру предсказания отводится решающая роль в случае спектрального оценивания с высоким разрешением, адаптивного выделения спектральных линий, адаптивной компенсации шума и адаптивной обработки сигналов при классификации помеховой обстановки.

Линейный фильтр предсказания, описываемый соотношением (6.1.46), можно интерпретировать как фильтр с конечной импульсной характеристикой (КИХ), реализуемый несколькими способами: методом прямой реализации, в каскадной форме и в параллельной форме.

В большинстве случаев предполагается, что фильтр предсказания строится в прямой форме (в виде линии задержки с отводами), как показано на рис. 6.1.1. В определенных случаях фильтр предсказания реализуется в каскадной форме – в виде так называемой решетчатой, или лестничной структуры, изображенной на рис. 6.1.2.

Передаточная функция решетчатого фильтра, показанного на рис. 6.1.2, определяется величинами параметров K_i , которые называются коэффициентами отражения или коэффициентами частотной корреляции. Значения коэффициентов отражения однозначно определяются передаточной функцией $A_N(Z)$ или корреляционной последовательностью $\{R_i\}$.

Для реализации конкретного фильтра на спецпроцессоре можно воспользоваться как прямым методом, так и решетчатой структурой, т. к. они математически эквивалентны. В то же время решетчатая структура имеет ряд практических преимуществ.

1. Шум на выходе решетчатого фильтра практически не зависит от ширины полосы и центральной частоты фильтра.

2. Решетчатая структура обеспечивает нужный уровень качества (например, заданную максимальную неравномерность в полосе пропускания) при использовании параметров, заданных словами меньшей длины, чем при соответствующей прямой реализации.

3. Распространяющиеся в решетчатом фильтре сигналы $\{\varepsilon_{1,T}, \dots, \varepsilon_{N,T}\}$ оказываются ошибками предсказания по методу наименьших квадратов, причем эти ошибки будут взаимно ортогональны, т. е. при $i \neq j$ $E\{\varepsilon_{i,T} \varepsilon_{j,T}\} = 0$. Каждое звено решетчатого фильтра выполняет один шаг процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Полезность свойства ортогонализации проявляется во многих отношениях. Фильтр прямой реализации свойством ортогональности не обладает.

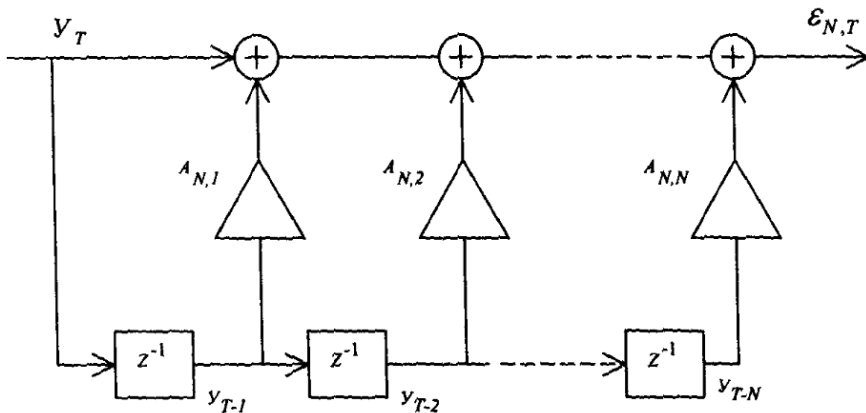


Рис. 6.1.1. Прямая реализация КИХ фильтров, работающих по критерию наименьших квадратов ошибок предсказания

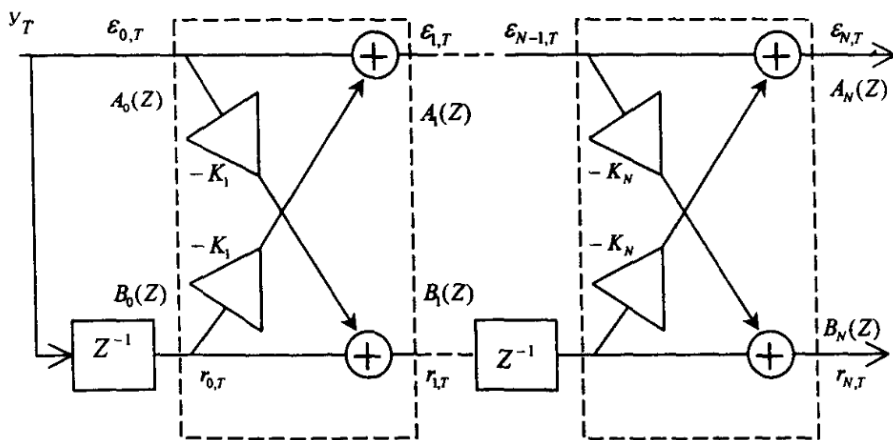


Рис. 6.1.2. Фильтр, работающий по критерию наименьших квадратов ошибок предсказания и выполненный по решетчатой структуре

4. Чтобы осуществить предсказание для фильтров всех порядков (до N) при прямой реализации, требуется знать $N(N+1)/2$ параметров ($A_{p,i}$, $1 \leq i \leq p \leq N$), а для решетчатых фильтров требуется всего N коэффициентов отражения ($k_i, i=1, \dots, N$).

5. При разработке рекурсивных алгоритмов для адаптивных фильтров предсказания требуемый объем вычислений для адаптивного решетчатого фильтра несколько меньше, чем для соответствующего фильтра прямой реали-

защиты.

Вычисленный с помощью рекуррентных соотношений Левинсона набор коэффициентов фильтра предсказания можно представить в виде следующей верхней треугольной (блочной) матрицы:

$$U_A = \begin{bmatrix} I & A_{N,1} & \dots & A_{N,N} \\ & \ddots & & \\ & & I & A_{11} \\ & & & I \end{bmatrix}. \quad (6.1.49)$$

Аналогично коэффициент блочного фильтра обратного предсказания будет следующим:

$$L = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & B_{1,1} & \ddots & & \\ & \vdots & & I & \\ & \vdots & & & \ddots \\ & B_{N,N} & & & I \end{bmatrix}. \quad (6.1.50)$$

Если на вход решетчатого фильтра, показанного на рис. 6.1.2 воздействует последовательность $\{V_0, V_1, \dots\}$, то распространяющиеся по фильтру сигналы будут представлять собой ошибки прямого и обратного предсказания:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{P+1,T} &= \varepsilon_{P,T} - K_{P+1}' r_{P,T-1}, \\ r_{P+1,T} &= r_{P,T-1} - K_P^E \varepsilon_{P,T}. \end{aligned} \quad (6.1.51)$$

Коэффициенты отражения и коэффициенты предсказания непосредственно связаны тождеством

$$[K_1', \dots, K_p'] = [A_{p,1}, \dots, A_{p,p}] L_6^{-1}. \quad (6.1.52)$$

Рассмотрим фильтр прямого предсказания P -го порядка, для которого ошибка предсказания определяется соотношением

$$\varepsilon_{P,T} = V_T + \sum_{i=1}^P A_{P,i} V_{T-i}. \quad (6.1.53)$$

Фильтр предсказания по методу наименьших квадратов определяется нахождением коэффициентов $\{A_{P,i}\}$, набор которых минимизирует сумму квадратов ошибок предсказания $t_r \left\{ \sum_{t=0}^{T+P} \varepsilon_{P,t} \varepsilon'_{P,t} \right\}$. Запишем соотношение (6.1.53) (для $t = 0, \dots, T+P$) в матричной форме:

$$\left[\varepsilon_{P,0}, \dots, \varepsilon_{P,T+P-1}, 0 \right] = Y + \left[A_{P,1}, \dots, A_{P,P} \right] Y_{P,T}, \quad (6.1.54)$$

где $Y = [Y_0, \dots, Y_T, 0, \dots, 0]$, $m(T+P+1)$ – матрица;

$$Y_{P,T} = \begin{bmatrix} Y_0 & \dots & Y_{m-1} & \dots & Y_{T-1} & \dots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & Y_0 & \dots & Y_{T-m} & & Y_{T-1} \end{bmatrix}; \quad (6.1.55)$$

$m(T+P+1)$ – матрица данных.

При записи уравнения (6.1.55) в зависимости от характера данных вне интервала наблюдения $[0, T]$ различают следующие варианты матрицы данных:

1) с предварительным взвешиванием, когда предполагается, что до момента $t = 0$ данные равны нулю, но не делается никаких предположений относительно данных после момента $t = T$;

2) ковариационный метод, при котором не делается никаких допущений относительно данных вне интервала;

3) с последующим взвешиванием;

4) корреляционный метод, при котором считают, что данные равны нулю до момента $t = 0$ и после момента $t = T$.

Коэффициенты отражения можно определить как взаимную корреляцию ошибок прямого и обратного предсказания:

$$\begin{aligned} K_{P+1}^\varepsilon &= R_{P\Delta P+1}^{-\varepsilon} = \left[E \left\{ \varepsilon_{P,t} \varepsilon'_{P,t} \right\} \right]^{-1} E \left\{ \varepsilon_{P,t} r'_{P,t-1} \right\}, \\ K_{P+1}^r &= \Delta_{P+1} R_P^{-r} = E \left\{ \varepsilon_{P,t} r'_{P,t-1} \right\} \left[E \left\{ r_{P,t-1} r'_{P,t-1} \right\} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.1.56)$$

Заменяя математическое ожидание временными средними, получаем удобный метод практического вычисления коэффициентов:

$$K_{P+1}^\varepsilon = \left[\sum_t \varepsilon_{P,t} \varepsilon'_{P,t} \right]^{-1} \left[\sum_t \varepsilon_{P,t} r'_{P,t-1} \right],$$

$$K_{P+1}^N = \left[\sum_t \varepsilon_{P,t} r'_{P,t-1} \right] \left[\sum_t r_{P,t-1} r'_{P,t-1} \right]^{-1}. \quad (6.1.57)$$

Пределы суммирования зависят от конкретного метода записи данных (6.1.55). Все не рекурсивные методы, обеспечивающие линейное предсказание, основаны на блочной обработке: методы, исходящие из ошибок предсказания, требуют многократной прогонки данных; методы на основе выборочной корреляционной матрицы требуют вычисления выборочных коэффициентов корреляции по полной совокупности данных.

Известны также рекуррентные алгоритмы построения фильтров предсказания, основанные на алгоритмах градиентной адаптивной решетчатой структуры (ГАРС). Например, алгоритм Граффитса предусматривает обоснование ошибки и коэффициентов отражения:

$$\begin{cases} \varepsilon_{P+1,T} = \varepsilon_{P,T} - K_{P+1,T}^r r_{P,T-1}, \\ r_{P+1,T} = r_{P,T-1} - K_{P+1,T}^\varepsilon \varepsilon_{P,T}, \\ K_{P+1,T+1}^r = K_{P+1,T}^r + \mu_{P+1} \varepsilon_{P+1,T} r_{P,T-1}, \\ K_{P+1,T+1}^\varepsilon = K_{P+1,T}^\varepsilon + \mu_{P+1} \varepsilon_{P+1,T} r_{P+1,T}, \end{cases} \quad (6.1.58)$$

где μ_{P+1} – величина, соответствующая размеру шага и определяющая скорость сходимости алгоритма.

При разработке решетчатой структуры адаптивного фильтра используются обобщенные рекуррентные соотношения Левинсона. Важнейшей особенностью обобщенного алгоритма Левинсона и решетчатой структуры наименьших квадратов (РСНК) является наличие формул эффективного обновления во времени коэффициентов фильтра предсказания, которые рекурсивно обновляются по мере поступления каждого отсчета данных. Алгоритмы решетчатой структуры дают значительно более быструю сходимость, чем не решетчатые алгоритмы наименьших средних квадратов (Уидроу). Самым быстрым является алгоритм РСНК: установившееся среднее значение квадрата ошибки в нем достигается примерно за 10 шагов обучения. Однако при оценке качественных показателей решетчатых фильтров надо иметь в виду, что рассмотренные алгоритмы решетчатой структуры обеспечивают решение линейной задачи оценивая по критерию наименьших квадратов. Поэтому их качественные показатели не могут быть лучше, чем следует из теории таких оценивающих устройств.

Чтобы воспользоваться цифровыми методами спектрального оценивания, рассмотренными в этом параграфе, необходимо синтезировать алгоритмы приема сигналов, адекватные вычислительным средствам.

6.2. Синтез цифровых алгоритмов приема сигналов в каналах с узкополосными помехами

Принятая смесь сигнала с помехами на входе приемника

$$\underline{Z}'(t) = \underline{Z}_r(t) + S_r(t) + \xi(t) = \text{Re}[\underline{Z}'(t)], \quad t \in T. \quad (6.2.1)$$

Здесь $\underline{Z}_r(t)$ – принятый полезный сигнал ($r = 1, 2, \dots$);

$S_r(t)$ – совокупность УП, действующих на r -й вариант принятого сигнала;

$\xi(t)$ – реализация аддитивной флуктуационной помехи, аппроксимируемой белым гауссовым шумом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности $\nu^2 = \sigma_\xi^2 T$;

T – длительность элемента сигнала.

После дискретизации и квантования входной сигнал (6.2.1) представим последовательностью комплексных чисел

$$\underline{Z}'(n) = \underline{Z}_r(n) + \underline{S}_r(n) + \underline{\xi}(n), \quad n \in N, \quad (6.2.2)$$

где $N = T/\Delta t = 2F_c T$;

Δt – интервал дискретизации;

F_c – ширина полосы сигнала.

При аналого-цифровом преобразовании учтен большой динамический диапазон уровней принимаемых сигналов и помех, поэтому требуемая разрядность АЦП должна быть не менее 10... 12. При такой разрядности АЦП можно пренебречь интермодуляционными составляющими помех. Ошибки квантования можно учесть в виде дополнительного аддитивного шума в составе $\underline{\xi}(n)$. Хотя шумы квантования в общем случае негауссовы, коррелированы и связаны со входным процессом, но, как показано в [162], при $\beta < 1$ пренебрежимо мала взаимная корреляция между шумом квантования и исходным квантуемым процессом, а при $\beta \ll 1$ практически отсутствует корреляция между значениями ошибки квантования. Здесь $\beta = \Delta^2 / \sigma_{ex}^2$, где Δ – шаг квантования, σ_{ex}^2 – дисперсия входного процесса. Нетрудно показать, что 4...5 разрядов АЦП достаточно для выполнения условия $\beta \ll 1$. С увеличением разрядности АЦП дисперсия шумов квантования быстро уменьшается и у пятиразрядного АЦП она составляет менее 0,35 % от дисперсии исходного квантуемого процесса. Это позволяет пренебречь шумом квантования при большой разрядности АЦП.

Статистические свойства сигналов и помех, преобразованных в цифровую форму, мало отличаются от статистических свойств исходных аналоговых сигналов и помех при правильно выбранном шаге дискретизации во времени и

большом числе уровней квантования. Для этого достаточно 7...9 разрядного АЦП [104].

При сделанных допущениях последовательность $\underline{\xi}(n)$ является процессом с независимыми значениями с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\Delta}^2$, где σ_{Δ}^2 – дисперсия шумов квантования. Разрядность АЦП берут такой, что $\sigma_{\Delta}^2 \ll \sigma_{\xi}^2$. Совместная плотность вероятности значений $\underline{\xi}(n)$ имеет вид

$$W(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_N) = \left(2\pi\sigma_{\Sigma}^2\right)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\Sigma}^2} \sum_{i=1}^N |\underline{\xi}_i|^2\right). \quad (6.2.3)$$

Правило решения по критерию идеального наблюдателя определяется неравенством

$$\ln \Lambda_{r/l} > 0, \quad r \neq l, \quad (6.2.4)$$

где $\Lambda_{r/l} = \Lambda_{r0} / \Lambda_{l0}$ – отношение правдоподобия (ОП) r -го варианта сигнала относительно l -го,

Λ_{r0} – отношение функций правдоподобия при наличии и отсутствии r -го сигнала.

Для формирования ОП используем концепцию порождающего процесса применительно к последовательностям чисел (6.2.2) [65,103].

Порождающим процессом $\underline{\zeta}_r(n)$ называется разность

$$\underline{\zeta}_r(n) = \underline{Z}'(n) - \hat{\underline{Z}}_r(n) - \hat{\underline{S}}_r(n), \quad (6.2.5)$$

где $\hat{\underline{Z}}_r(n)$ и $\hat{\underline{S}}_r(n)$ – оценки по критерию минимума среднего квадрата ошибки r -го сигнала и совокупности УП, воздействующих на r -й сигнал.

Найдем корреляционную функцию последовательности $\underline{\zeta}_r(n)$

$$\begin{aligned} B_{\zeta_r}(n-k) &= \overline{\underline{\zeta}_r(n) \underline{\zeta}_r^*(k)} = \overline{[\underline{\varepsilon}_r(n) + \underline{\xi}_r(n)][\underline{\varepsilon}_r^*(k) + \underline{\xi}_r^*(k)]} = \\ &= \overline{\underline{\varepsilon}_r(n) \underline{\varepsilon}_r^*(k)} + 2\overline{\underline{\varepsilon}_r(n) \underline{\xi}_r^*(k)} + \overline{\underline{\xi}_r(n) \underline{\xi}_r^*(k)} = \sigma_{\zeta_r}^2 \delta(n-k), \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

где $\sigma_{\zeta_r}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\Delta}^2 + \sigma_{\varepsilon_r}^2$ – дисперсия порождающего процесса $\underline{\zeta}_r(n)$;

$\delta(n-k)$ – символ Кронекера.

В (6.2.6) $\underline{\varepsilon}_r(n)$ представляет собой последовательность ошибок оценивания r -го сигнала и совокупности УП, воздействующих на сигнал;

$\underline{\varepsilon}_r(n) \underline{\xi}^*(k) = 0$, т. к. ошибка оценки в предыдущий момент не коррелирована с шумом в данный момент.

Порождающий процесс в виде последовательности чисел $\underline{\zeta}_r(n)$ так же, как и процесс $\underline{\xi}(n)$ является белым гауссовым шумом с нулевым средним, но с другой дисперсией $\sigma_{\zeta_r}^2$, в отличие от порождающего процесса $\underline{\zeta}_r(t)$ в непрерывном времени, у которого дисперсия такая же, как у процесса $\underline{\xi}(t)$ [65, 215, 216].

Порождающий процесс в отсутствие сигнала

$$\underline{\zeta}_r(n) = \underline{Z}'(n) - \hat{\underline{S}}_{r,0}(n) = \sum_k \underline{Z}'(k) \left[\delta(n-k) - \underline{G}^*(n-k) \right], \quad (6.2.7)$$

Здесь

$$\hat{\underline{S}}_{r,0}(n) = \sum_k \underline{Z}'(k) \underline{G}^*(n-k) \quad (6.2.8)$$

– оценка совокупности УП по критерию минимума среднего квадрата ошибки в отсутствие r -го сигнала; $\underline{G}^*(k)$ – комплексная импульсная характеристика фильтра оценки УП. Как видно из (6.2.8), оценка УП определяется сверткой $\underline{Z}'(n)$ и $\underline{G}^*(n)$.

В (6.2.7) $\left[\delta(n-k) - \underline{G}^*(n-k) \right]$ – импульсная характеристика обеливающего фильтра.

Исходя из реальной помеховой обстановки в загруженных диапазонах волн, будем полагать, что мощность принятого сигнала гораздо меньше мощности совокупности УП, поэтому дисперсия ошибки оценивания определяется в основном помехами и практически одинакова при наличии и в отсутствие сигнала.

Совместная плотность вероятностей значений $\underline{\zeta}_r(n)$ как и $\underline{\xi}(n)$ определяется (6.2.3) с учетом нового значения дисперсии $\sigma_{\zeta_r}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\Delta}^2 + \sigma_{\varepsilon r}^2$, где $\sigma_{\varepsilon r}^2$ – дисперсия ошибки оценивания совокупности УП. Учитывая (6.2.3), (6.2.5) и (6.2.7) отношение функций правдоподобия r -го сигнала и помех будет иметь вид

$$\Lambda_{r0} = \frac{W(\underline{\xi}_{r1}, \dots, \underline{\xi}_{rN} / \underline{Z}_r)}{W(\underline{\xi}_{r1}, \dots, \underline{\xi}_{rN} / 0)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\zeta r}^2} \sum_{i=1}^N \left| \underline{Z}'_i - \underline{\hat{Z}}'_{ri} - \underline{\hat{S}}_{ri} \right|^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\xi r}^2} \sum_{i=1}^N \left| \underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_{r0i} \right|^2\right)}.$$

Аналогично можно вывести Λ_{l0} . После подстановки Λ_{r0} и Λ_{l0} (6.2.4) получим алгоритм приема в общем случае

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{\zeta r}^2} \sum_{i=1}^N \{ \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_{ri}) \underline{\hat{Z}}_{ri}^* + \underline{Z}'_i (\underline{\hat{S}}_{ri}^* - \underline{\hat{S}}_{r0i}^*)] - \frac{1}{2} (|\underline{\hat{Z}}_{ri}|^2 + \\ & + |\underline{\hat{S}}_{ri}|^2 - |\underline{\hat{S}}_{r0i}|^2) \} > \frac{1}{\sigma_{\zeta l}^2} \sum_{i=1}^N \{ \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_{li}) \underline{\hat{Z}}_{li}^* + \\ & + \underline{Z}'_i (\underline{\hat{S}}_{li}^* - \underline{\hat{S}}_{l0i}^*)] - \frac{1}{2} (|\underline{\hat{Z}}_{li}|^2 + |\underline{\hat{S}}_{li}|^2 - |\underline{\hat{S}}_{l0i}|^2) \}, \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Знак (*) означает комплексно-сопряженную величину. Реализация этого алгоритма довольно затруднительна. Для сигналов с активной паузой с перекрывающимися спектрами ($\underline{\hat{S}}_{ri} = \underline{\hat{S}}_{li} = \underline{\hat{S}}_{r0i} = \underline{\hat{S}}_{l0i}$) и одинаковыми энергиями ($|\underline{\hat{Z}}_{ri}|^2 = |\underline{\hat{Z}}_{li}|^2$) алгоритм приема (6.2.9) заметно упрощается

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_i) \underline{\hat{Z}}_{ri}^*] > \sum_{i=1}^N \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_i) \underline{\hat{Z}}_{li}^*], \quad r \neq l. \quad (6.2.10)$$

Из (6.2.10) для детерминированных сигналов ($\underline{\hat{Z}}_{ri} = \underline{Z}_{ri}; \underline{\hat{Z}}_{li} = \underline{Z}_{li}$) следует алгоритм когерентного приема:

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_i) \underline{Z}_{ri}^*] > \sum_{i=1}^N \operatorname{Re}[(\underline{Z}'_i - \underline{\hat{S}}_i) \underline{Z}_{li}^*], \quad r \neq l. \quad (6.2.11)$$

Особенностью алгоритмов (6.2.10), (6.2.11) является вычитание из принятой смеси оценки совокупности УП, что эквивалентно процедуре обеливания. Для формирования оценки УП используется входная последовательность.

Рассмотрим возможности авторегрессионной (АР) модели входного процесса

$$\underline{Z}'(n) = -\sum_{k=1}^P \underline{a}_k \underline{Z}'(n-k) + \underline{\xi}(n)$$

для определения оценки совокупности узкополосных помех в виде

$$\hat{\underline{S}}(n) = \hat{\underline{Z}}'(n) = -\sum_{k=1}^P \underline{a}_k \underline{Z}'(n-k). \quad (6.2.12)$$

В (6.2.12) параметры \underline{a}_k рекуррентно вычисляются при помощи алгоритма Левинсона-Дербина так, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку оценивания ε_p^2 и определяются формулами (6.1.33)

$$\begin{aligned} \underline{a}_{kk} &= -\left[\underline{R}(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \underline{a}_{k-1,l} \underline{R}(k-l) \right] / \sigma_{k-1}^2; \\ \underline{a}_{kj} &= \underline{a}_{k-1,j} + \underline{a}_{kk} \underline{a}_{k-1,k-j}^*; \\ \sigma_k^2 &= \left(1 - |\underline{a}_{kk}|^2 \right) \sigma_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} \underline{a}_{11} &= -\underline{R}(1) / \underline{R}(0); \\ \sigma_1^2 &= \left(1 - |\underline{a}_{11}|^2 \right) \underline{R}(0). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

В (6.2.13), (6.2.14) дополнительный индекс ($k=1,2,\dots,p$) у AP-коэффициентов ($\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \dots, \underline{a}_{pp}, \sigma_p^2$) введен для обозначения порядка модели. Полезным свойством алгоритма Левинсона-Дербина является возможность использования его в тех случаях, когда требуемый порядок модели заранее неизвестен. Ковариационная функция процесса $\underline{R}(k)$ оценивается известными методами по входной реализации принятой смеси.

На рис. 6.2.1 показан один из вариантов структурной схемы адаптивного цифрового фильтра (АЦФ) обеливания. Он содержит устройство вычисления оценок ковариационных функций $\underline{R}(k)$ на этапе обучения, устройство вычисления коэффициентов \underline{a}_k и собственно фильтр в виде сумматора задержанных и взвешенных с весом \underline{a}_k значений входных последовательностей. В локально стационарных каналах вычисленные оценки используются на интервале стационарности, после чего обновляются. Изменение помеховой обстановки приводит к изменению дисперсии ошибки оценивания σ_p^2 , которая может служить индикатором состояния канала для принятия решения о необходимости обновления оценок.

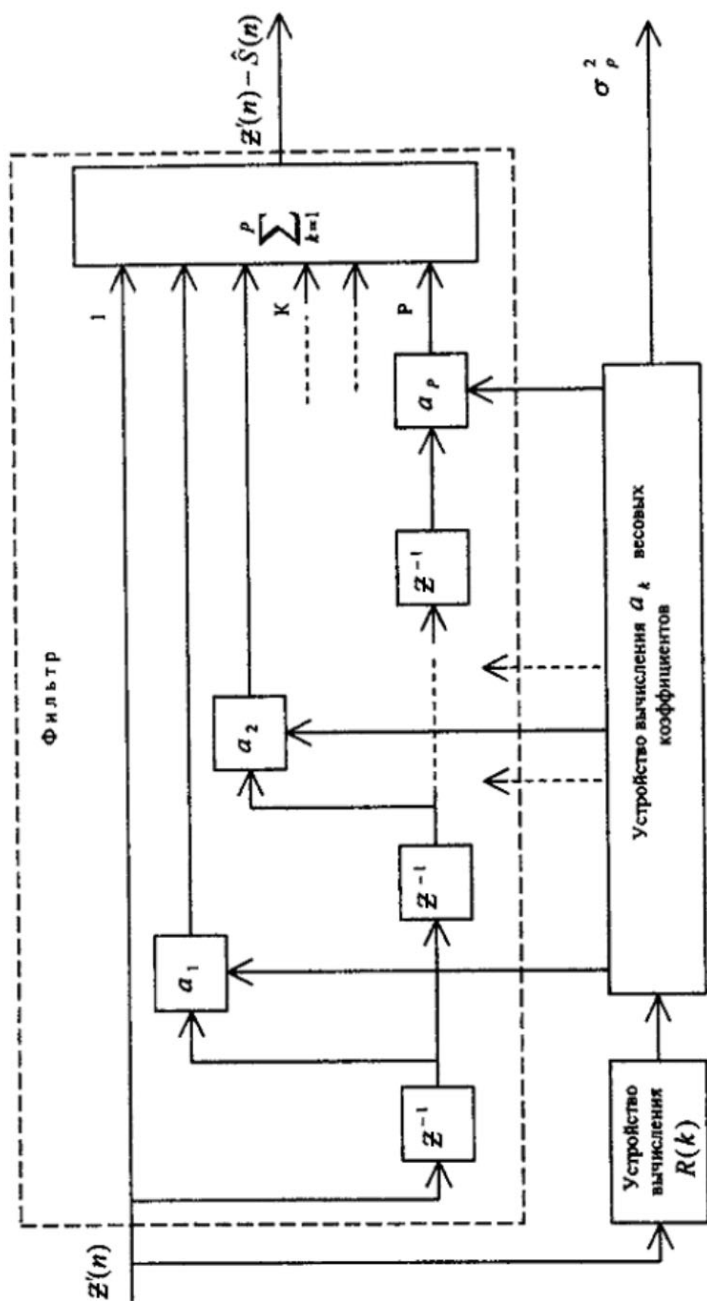


Рисунок 6.2.1 – Структурная схема адаптивного «обеляющего» фильтра

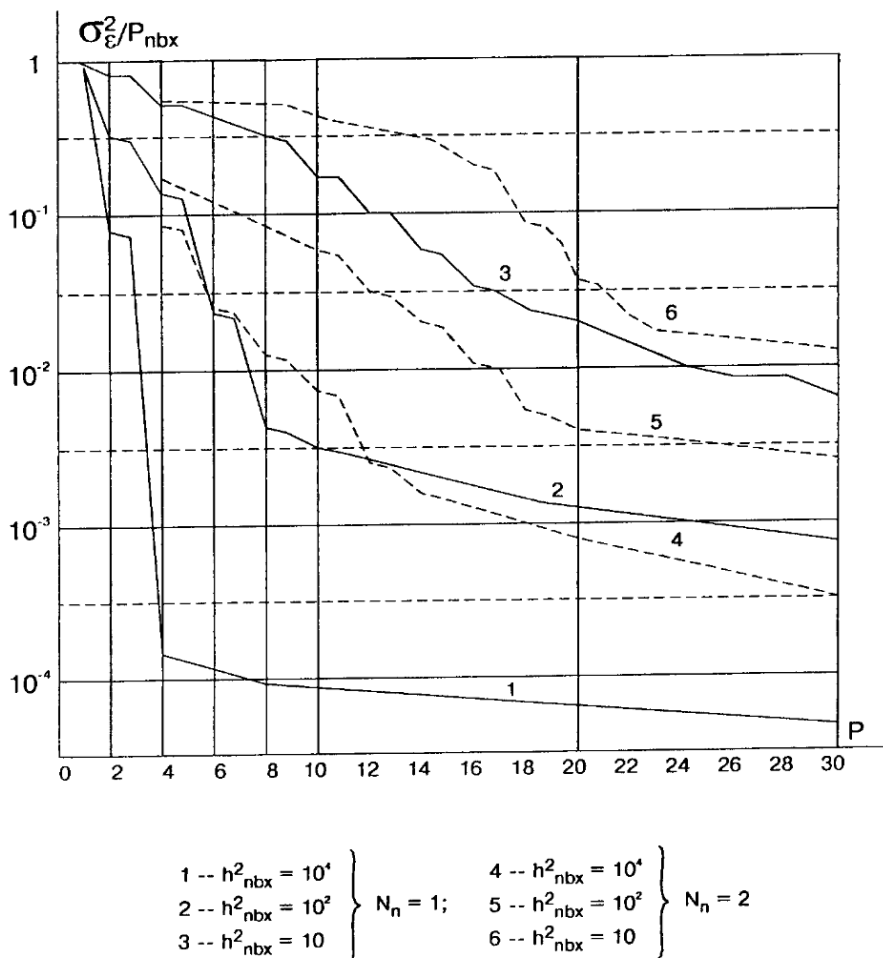


Рис. 6.2.2. Зависимость дисперсии ошибки оценивания УП от порядка фильтра

Результаты моделирования такого фильтра на ЭВМ приведены на рис. 6.2.2 и 6.2.3 в виде зависимостей дисперсии ошибки оценивания УП, нормированных к мощности УП на входе, от порядка фильтра P при разных отношениях мощности УП к дисперсии флуктуационного шума ($h_{пех}^2 = P_{пех}/\sigma_{\xi}^2$). На рис. 6.2.2 представлены зависимости для немодулированных синусоидальных помех при действии одной помехи (кривые 1, 2, 3) и двух помех (кривые 4, 5, 6). На рис. 6.2.3 приведены зависимости для амплитудно-модулированных УП, у которых в качестве модулирующей функции использован гауссовский марковский процесс с интервалом корреляции в 10 раз большим интервала кор-

реляции полезного сигнала. В качестве полезного сигнала взята фазоманипулированная М-последовательность. Из приведенных кривых видно, что с увеличением порядка фильтра дисперсия ошибки оценивания УП уменьшается. Увеличение количества, оцениваемых и подавляемых УП, требует увеличения порядка фильтра.

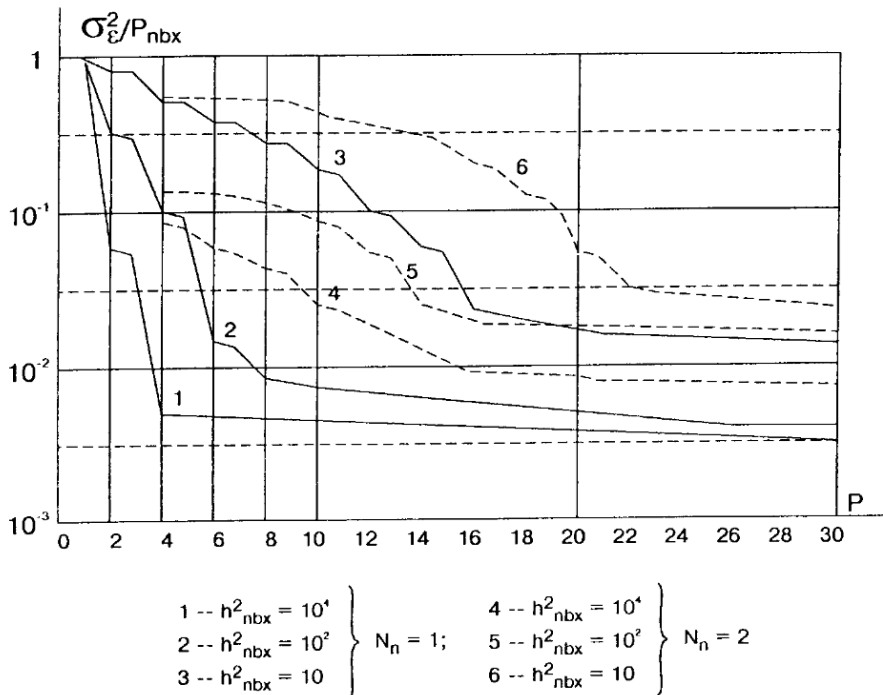


Рис. 6.2.3. Зависимость дисперсии ошибки оценивания УП от порядка фильтра

6.3. Анализ помехоустойчивости цифровых алгоритмов

Проведем анализ помехоустойчивости приема двоичных сигналов с активной паузой по правилу (6.2.11). Для этого подставим в (6.2.11) сигналы в форме

$$\underline{Z}_{ri} = (\mu_c - j\mu_s)(\underline{Z}_{ri} + j\tilde{\underline{Z}}_{ri}); r = 1, 2, \quad (6.3.1)$$

где μ_c и μ_s – ортогональные составляющие коэффициента передачи канала. Знак \sim означает преобразование по Гильберту.

Преобразуем алгоритм (6.2.11) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_c}{2\sigma_\zeta^2} \sum_{i=1}^N [(\mathcal{Z}'_i - \hat{S}_i)(\mathcal{Z}_{1i} - \mathcal{Z}_{2i}) + (\tilde{\mathcal{Z}}'_i - \hat{S}_i)(\tilde{\mathcal{Z}}_{1i} - \tilde{\mathcal{Z}}_{2i})] + \\ & + \frac{\mu_s}{2\sigma_\zeta^2} \sum_{i=1}^N [(\mathcal{Z}'_i - \hat{S}_i)(\tilde{\mathcal{Z}}_{1i} - \tilde{\mathcal{Z}}_{2i}) - (\tilde{\mathcal{Z}}'_i - \hat{S}_i)(\mathcal{Z}_{1i} - \mathcal{Z}_{2i})] > 0. \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Здесь в соответствии с (6.2.2) и (6.3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'_i &= \mu_c \mathcal{Z}_{ri} + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_{ri} + S_i + \xi_i; \\ \tilde{\mathcal{Z}}'_i &= \mu_c \tilde{\mathcal{Z}}_{ri} - \mu_s \mathcal{Z}_{ri} + \tilde{S}_i + \tilde{\xi}_i; \quad r = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Оценка совокупности УП формируется по неклассифицированной входной последовательности смеси сигнала и помех

$$\hat{S}_i = \sum_k \underline{Z}'(k) \underline{G}^*(n-k) = \hat{S}_i + j\hat{S}_i,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_i &= \mu_c \mathcal{Z}_{ri}^{(\Pi)} + \mu_s \tilde{\mathcal{Z}}_{ri}^{(\Pi)} + S_i + \varepsilon_i; \\ \hat{\tilde{S}}_i &= \mu_c \tilde{\mathcal{Z}}_{ri}^{(\Pi)} - \mu_s \mathcal{Z}_{ri}^{(\Pi)} + \tilde{S}_i + \tilde{\varepsilon}_i. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

В (6.3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{ri}^{(\Pi)} &= \sum_k \mathcal{Z}_r(k) \mathcal{G}(i-k) = \sum_k \tilde{\mathcal{Z}}_r(k) \tilde{\mathcal{G}}(i-k); \\ \tilde{\mathcal{Z}}_{ri}^{(\Pi)} &= \sum_k \tilde{\mathcal{Z}}_r(k) \mathcal{G}(i-k) = -\sum_k \mathcal{Z}_r(k) \tilde{\mathcal{G}}(i-k) \end{aligned}$$

– сигнал ($r = 1, 2$) на выходе фильтра оценки УП; $\tilde{\mathcal{G}}(i-k)$ – импульсная характеристика фильтра оценки УП с учетом преобразования по Гильберту; $\underline{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + j\tilde{\varepsilon}_i$ – ошибка оценивания совокупности УП.

Вероятность ошибки определяется вероятностью невыполнения неравенства (6.3.2) при передаче первого сигнала

$$p_{ош} = P(\chi < 0) = \int_{-\infty}^0 W(\chi) d\chi, \quad (6.3.5)$$

где χ – левая часть неравенства (6.3.2) при передаче первого сигнала. При сделанных предположениях χ является нормальной случайной величиной со средним значением

$$\bar{\chi} = h^2 (1 - \rho - q_1 + q_2) \quad (6.3.6)$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = \overline{\chi^2} - (\bar{\chi})^2 = h^2 (1 - \rho). \quad (6.3.7)$$

В этих выражениях

$$h^2 = h_c^2 / (1 + h_\Delta^2 + h_\varepsilon^2), \quad (6.3.8)$$

где $h_c^2 = (\mu_c^2 + \mu_s^2) P_c / \sigma_\xi^2 = \mu^2 P_c T / v^2$ – отношение энергии элемента принятого сигнала к спектральной плотности мощности шума;

$h_\Delta^2 = \sigma_\Delta^2 / \sigma_\xi^2$ – отношение дисперсии шумов квантования к дисперсии входных шумов;

$h_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\xi^2$ – отношение дисперсии ошибки оценивания совокупности УП к дисперсии входных шумов;

$$P_c = \sum_{i=1}^N Z_{ri}^2 = \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{ri}^2$$

– мощность последовательности $Z_r(n)$ ($r = 1, 2$);

$$\rho = \sum_{i=1}^N Z_{ri} Z_{1i} / P_c = \sum_{i=1}^N \tilde{Z}_{ri} \tilde{Z}_{1i} / P_c$$

– коэффициент, характеризующий вид используемых сигналов;

$\rho = -1$ для противоположных сигналов; $\rho = 0$ для ортогональных сигналов;

$$q_r = 0,5 \sum_{i=1}^N \left(Z_{ri} Z_{1i}^{(II)} + \tilde{Z}_{ri} \tilde{Z}_{1i}^{(II)} \right) / P_c$$

– коэффициент, характеризующий взаимное различие r -го ($r = 1, 2$) сигнала и УП ($0 \leq q_1 \leq 1$; $-1 \leq q_2 \leq 0$ для противоположных сигналов, $0 \leq q_1 \leq 1$; $q_2 = 0$ для ортогональных сигналов).

Согласно (6.3.5)–(6.3.7) вероятность ошибки

$$p_{ош} = 0,5 \left\{ 1 - \Phi \left[h \sqrt{1 - \rho} \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{1 - \rho} \right) \right] \right\}, \quad (6.3.9)$$

где $\Phi(z) = \sqrt{2/\pi} \int_0^z \exp(-t^2/2) dt$ – функция Крампа.

Из (6.3.9) с учетом (6.3.8) видно, что вероятность ошибки зависит от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума (h_c^2), от дисперсии шумов квантования (h_Δ^2), от дисперсии ошибки оценивания совокупности УП (h_ε^2) и от коэффициентов взаимного различия сигналов и УП (q_1 и q_2).

В качестве иллюстрации на рис. 6.3.1 приведены зависимости вероятности ошибки $p_{ош}$ от h_c при действии марковских узкополосных помех ($q_1 = 0,1$) с однополюсным спектром. Кривые рассчитаны по формуле (6.3.9) с учетом (6.3.8) при $h_\Delta^2 = 10^{-2}$; $h_{\text{пех}}^2 = 10^2$; $\rho = 0$; $q_2 = 0$ (ортогональные сигналы). Для определения h_ε^2 использованы результаты рис. 6.2.2 при $h_{\text{пех}}^2 = 10^2$. Из приведенных кривых видно, что с увеличением порядка фильтра оценки УП вероятность ошибки уменьшается в соответствии с уменьшением дисперсии ошибки фильтрации УП.

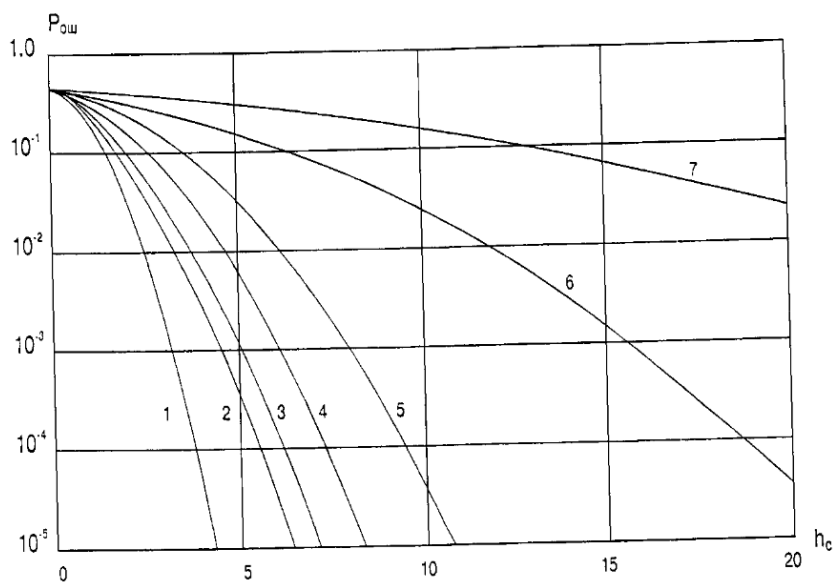
Вероятность ошибочного приема в условиях замираний сигнала можно найти усреднением (6.3.9) в соответствии с распределением h . В частности при медленных релейских замираниях сигнала вероятность ошибки определяется известным выражением

$$p_{ош} = 0,5 \left[1 - \sqrt{\overline{h_s^2} / (2 + \overline{h_s^2})} \right],$$

в котором

$$\overline{h_s^2} = \overline{h^2} (1 - \rho - q_1 + q_2) / (1 - \rho),$$

где $\overline{h^2}$ – определяется (6.3.8) при замене h_c^2 на среднестатистическое значение $\overline{h_c^2} = \mu^2 P_c T / \nu^2$. При этом сохраняются отмеченные выше особенности приема сигналов в условиях действия совокупности узкополосных и флуктуационных помех.



$$1 - h_{пex}^2 = 0; 2 \dots 7 - h_{пex}^2 = 100$$

$$2 - p = 30; 3 - p = 10; 4 - p = 6; 5 - p = 4; 6 - p = 2; 7 - p = 0$$

Рис. 6.3.1. Зависимость вероятности ошибки от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума

7. АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ С МНОГОЛУЧЕВЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ РАДИОВОЛН

В системах ММО (Multiple Input Multiple Output) [288–290, 295–297] происходит одновременная передача нескольких потоков данных в одной полосе частот несколькими передатчиками с несколькими антеннами и, соответственно, приемом несколькими приемными трактами. При этом, в приемнике возможно применение технологий кодового разделения широкополосных сигналов (CDMA – Code Division Multiple Access) и технологии OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) с пространственно-временным кодированием.

В данной главе исследуется помехоустойчивость обеих технологий. При этом рассматривается возможность использования технологии ZCZ–CDMA (ZCZ – Zero Correlation Zone). В отличие от традиционной CDMA такая технология использует псевдослучайные последовательности (коды) с нулевой зоной корреляции [291]. В них отсутствует (или гораздо меньше) вредное влияние помех, обусловленных неидеальностью авто- и взаимокорреляционных функций шумоподобных сигналов, т. е. помех межсимвольной интерференции многолучевого распространения сигналов, интерференционных помех множественного доступа, интерференционных помех от соседних сот [291–294, 298, 313, 318].

Исследуется помехоустойчивость разнесенного приема с адаптацией по пилотным сигналам в системах с OFDM [315].

7.1. Синтез адаптивных алгоритмов приема широкополосных сигналов с нулевой зоной корреляции в мобильных системах ММО

На передающем конце линии связи скоростной поток данных демультимплексируется на M подпотоков, которыми модулируют M передатчиков и излучаются M антеннами. Сигнал принимается Q приемниками, демодулируется и мультимплексируется в один поток данных. В системах с кодовым разделением каналов в одной полосе частот передается M шумоподобных сигналов. Их применение в многолучевых каналах позволяет осуществлять отдельный прием лучей.

Принятая смесь сигнала с помехами на выходе многолучевого канала, т. е. на входе одного приемника, имеет вид

$$z'(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\mu_{ci} z_r(t - \Delta t_i) + \mu_{si} \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) \right] + \sum_{q=1}^{M-1} \left[\mu_{ciq} z_q(t - \Delta t_i) + \mu_{siq} \tilde{z}_q(t - \Delta t_i) \right] \right\} + \xi(t), \quad (7.1.1)$$

$$NT + \Delta t_n \leq t < (N+1)T + \Delta t_n.$$

Здесь n – число приходящих лучей; μ_{ci} и μ_{si} – ортогональные составляющие коэффициента передачи i -го канала для сигнала $z_r(t)$; $z_r(t)$ – функция, определяющая переданный сигнал; $\tilde{z}_r(t)$ – функция, сопряженная $z_r(t)$ по Гильберту; Δt_i – время запаздывания i -го луча относительно первого ($\Delta t_1 = 0$); $\xi(t)$ – реализация флуктуационной помехи, аппроксимируемой белым гауссовским шумом с нулевым средним, со спектральной плотностью мощности ν^2 ; $T = MT_n$ – длительность элемента сигнала одного подпотока; T_n – длительность посылок исходного потока данных; $r = 1, 2, \dots, m$; m – алфавит сигнала.

Из (7.1.1) видно, что при приеме одного из M переданных сигналов, остальные $M-1$ воздействуют как интерференционные помехи из-за неидеальных авто- и взаимокорреляционных функций сигналов.

В общем случае могут быть неизвестны параметры сигнала μ_{ci} , μ_{si} , Δt_i . Их надо измерять (оценивать) для приема переданного сигнала. Интервал измерения параметров сигнала (обучения) $\Delta t_n \dots NT + \Delta t_n$, после чего на интервале $NT + \Delta t_n \dots (N+1)T + \Delta t_n$ принимается решение. Предполагаются медленные изменения параметров сигнала. В данной статье рассмотрим прием с измерением параметров сигнала μ_{ci} и μ_{si} .

Адаптивный алгоритм приема с обучением определяется отношением правдоподобия, в котором неизвестные априорные распределения параметров заменены апостериорными, сформированными при помощи обучающей выборки. Известно, что апостериорное распределение вероятностей содержит наиболее полное описание наблюдаемого случайного процесса.

В соответствии с критерием максимального правдоподобия для априорно равновероятных передаваемых сигналов, адаптивный алгоритм определяется неравенством

$$\ln \Lambda_{r/l} > 0, \quad r \neq l, \quad (7.1.2)$$

где

$$\Lambda_{r/l} = \frac{\int_{G(\mu_c, \mu_s)} W(\mu_c, \mu_s / z') \mathcal{F}(z' / z_r, \mu_c, \mu_s) d\mu_c d\mu_s}{\int_{G(\mu_c, \mu_s)} W(\mu_c, \mu_s / z') \mathcal{F}(z' / z_l, \mu_c, \mu_s) d\mu_c d\mu_s} \quad (7.1.3)$$

– отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно l -го.

Здесь $W(\mu_c, \mu_s / z')$ – апостериорное распределение параметров сигнала; $\mu_c = \{\mu_{ci}, \mu_{si}\}$, $i = 1, \dots, n$; $G(\mu_c, \mu_s)$ – область интегрирования, определяемая пределами изменения параметров сигнала;

$$\mathcal{F}(z' / z_r, \mu_c, \mu_s) = \frac{W(z' / z_r, \mu_c, \mu_s)}{W(z' / 0)} \quad (7.1.4)$$

– функционал отношения правдоподобия принятой по n -лучам смеси сигнала с помехами при передаче сигнала $z_r(t)$. В выражении (7.1.4)

$$W(z' / z_r, \mu_c, \mu_s) = \text{const} \exp \left[-\frac{1}{v^2} \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} \xi^2(t) dt \right], \quad (7.1.5)$$

где согласно (7.1.1)

$$\begin{aligned} \xi(t) = z'(t) - \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\mu_{ci} z_r(t - \Delta t_i) + \mu_{si} \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{M-1} \left[\mu_{ciq} z_q(t - \Delta t_i) + \mu_{siq} \tilde{z}_q(t - \Delta t_i) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

При синтезе алгоритмов приема предполагается, что передаются сигналы с зоной, свободной от интерференционных помех, поэтому далее будем пренебрегать слагаемыми вида

$$\int_T z_r(t - \Delta t_i) z_q(t - \Delta t_i) dt = \int_T \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) \tilde{z}_q(t - \Delta t_i) dt. \quad (7.1.7)$$

Функционал отношения правдоподобия определяется подстановкой (7.1.5) и (7.1.6) в (7.1.4).

Поскольку в широкополосных системах возможно полное разделение лучей, при условии $\Delta t_i \geq 1/F$, где F – полоса частот сигнала, то после подстановки (7.1.5) и (7.1.6) в (7.1.4), с учетом пренебрежения слагаемыми вида (7.1.7) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z' / z_r, \mu_c, \mu_s) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^n \left[\int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} z'(t) \left[\mu_{ci} z_r(t - \Delta t_i) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mu_{si} \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) \right] dt - \sum_{q=1}^M \left(\mu_{ciq}^2 + \mu_{siq}^2 \right) \frac{E_i}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

где, предполагая одинаковую энергию переданных символов, что соответствует действительности, имеем

$$E_i = \int_T z_r^2(t - \Delta t_i) dt = \int_T \tilde{z}_r^2(t - \Delta t_i) dt = \int_T z_q^2(t - \Delta t_i) dt = \int_T \tilde{z}_q^2(t - \Delta t_i) dt .$$

Найдем апостериорное распределение параметров сигнала при помощи обучающей выборки

$$z'_1(t), z'_2(t), \dots, z'_k(t), \dots, z'_N(t), \quad (7.1.9)$$

где $z'_k(t)$ определяется (7.1.1).

Поскольку принимаются сигналы с зоной, свободной от интерференционных помех, то далее при определении апостериорного распределения параметров сигнала не учитывается второе слагаемое в (7.1.1).

Условная плотность вероятности реализаций обучающей выборки (7.1.9) определится выражением

$$W_N(z'_1, \dots, z'_N / \mu_c, \mu_s) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu^2} \sum_{k=1}^N \left[\int_{(k-1)T + \Delta t_n}^{kT + \Delta t_n} [z'_k(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{i=1}^n [\mu_{ci} z_r(t - \Delta t_i) + \mu_{si} \tilde{z}_r(t - \Delta t_i)] \right]^2 dt \right\}. \quad (7.1.10)$$

С учетом полного разделения лучей выражение (7.1.10) преобразуется к виду

$$W_N(z'_1, \dots, z'_N / \mu_c, \mu_s) = \text{const} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}_i^2} \sum_{k=1}^N \left[(\mu_{ci}^{(k)} - \hat{\mu}_{ci}^{(k)})^2 + (\mu_{si}^{(k)} - \hat{\mu}_{si}^{(k)})^2 \right] \right\}, \quad (7.1.11)$$

где

$$\hat{\mu}_{ci}^{(k)} = \frac{1}{E_i} \int_{(k-1)T + \Delta t_n}^{kT + \Delta t_n} z'_k(t) z_r(t - \Delta t_i) dt, \quad (7.1.12)$$

$$\hat{\mu}_{si}^{(k)} = \frac{1}{E_i} \int_{(k-1)T + \Delta t_n}^{kT + \Delta t_n} z'_k(t) \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) dt$$

– максимально-правдоподобные оценки параметров сигнала на k -м этапе наблюдения в i -м луче; $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\nu^2}{2E_i}$ – дисперсия этих оценок.

Оценки параметров сигнала согласно (7.1.12) определяются сверткой принятой смеси и образца сигнала с задержкой на время запаздывания i -го луча. При этом необходимо снятие манипуляции с рабочих посылок сигнала в реализации (7.1.9).

Апостериорное распределение вероятностей параметров сигнала с учетом полного разделения лучей можно представить в виде

$$W(\mu_c, \mu_s / z') = \prod_{i=1}^n W(\mu_{ci}, \mu_{si} / z'). \quad (7.1.13)$$

Будем полагать, что в обучающей выборке (7.1.9) последовательность параметров $\mu_{ci}^{(1)}, \dots, \mu_{ci}^{(N)}$ образуют цепь Маркова с плотностью вероятностей перехода $W\left(\mu_{ci}^{(k+1)} / \mu_{ci}^{(k)}\right)$.

Полагая априорное распределение $W\left(\mu_{ci}^{(1)}\right)$ равномерным, по формуле Байеса находим апостериорное распределение параметров сигнала с учетом марковских свойств последних [162]:

$$W_N\left(\mu_{ci}^{(1)}, \dots, \mu_{ci}^{(N)} / z'_{1i}, \dots, z'_{Ni}\right) = \text{const} W_N\left(z'_{1i}, \dots, z'_{Ni} / \mu_{ci}\right) \prod_{k=1}^{N-1} W\left(\mu_{ci}^{(k+1)} / \mu_{ci}^{(k)}\right). \quad (7.1.14)$$

Искомая апостериорная плотность вероятностей на N -м этапе наблюдения получается из (7.1.14) $(N-1)$ -кратным интегрированием по $\mu_{ci}^{(1)}, \dots, \mu_{ci}^{(N-1)}$

$$W_N\left(\mu_{ci}^{(N)} / z'_{1i}, \dots, z'_{Ni}\right) = \int \dots \int W\left(\mu_{ci}^{(1)}, \dots, \mu_{ci}^{(N)} / z'_{1i}, \dots, z'_{Ni}\right) d\mu_{ci}^{(1)}, \dots, d\mu_{ci}^{(N-1)}. \quad (7.1.15)$$

При поступлении нового наблюдения $z'_{(N+1)i}$ плотность вероятностей (7.1.15) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} W_{(N+1)}\left(\mu_{ci}^{(N+1)} / z'_{1i}, \dots, z'_{(N+1)i}\right) &= \text{const} W_{(N+1)}\left(z'_{(N+1)i} / \mu_{ci}^{(N+1)}\right) \times \\ &\times \int W\left(\mu_{ci}^{(N+1)} / \mu_{ci}^{(N)}\right) W_N\left(\mu_{ci}^{(N)} / z'_{1i}, \dots, z'_{Ni}\right) d\mu_{ci}^{(N)}. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Это выражение определяет основной рекуррентный алгоритм для нахождения апостериорной плотности вероятностей параметров сигнала. Подставляя (7.1.16) с учетом (7.1.13) и (7.1.8) в (7.1.3) и интегрируя, можно получить адаптивный алгоритм работы приемника с обучением по сигналу в каждом конкретном случае. Для практических целей в условиях высокой точности измерения параметров сигнала достаточно ограничиться гауссовским приближением в

(7.1.16). Тогда целесообразна аппроксимация переходной плотности вероятностей формулой [151]:

$$W\left(\frac{\mu_{ci}^{(N+1)}}{s} / \frac{\mu_{ci}^N}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2(1-R_i^2)}} \exp\left[-\frac{\frac{\mu_{ci}^{(N+1)} - \mu_{ci}^N}{s} R_i^2}{2\sigma_i^2(1-R_i^2)}\right]. \quad (7.1.17)$$

После подстановки в (7.1.16) выражений (7.1.11) и (7.1.17), получим апостериорную плотность вероятностей на N -ом этапе [144]

$$W_N\left(\mu_{ci}^{(N)}, \mu_{si}^{(N)} / Z'_{1i}, \dots, Z'_{Ni}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Ni}^2} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma_{Ni}^2} \left[\left(\mu_{ci} - m_{ci}^{(N)}\right)^2 + \left(\mu_{si} - m_{si}^{(N)}\right)^2 \right]\right\}, \quad (7.1.18)$$

параметры которой определяются рекуррентными соотношениями

$$m_{ci}^{(N)} = \frac{\frac{m_{ci}^{(N-1)}}{s} \hat{\sigma}_i^2 R_i + \frac{\hat{\mu}_{ci}^{(N)}}{s} \left[\sigma_{(N-1)i}^2 R_i^2 + \sigma_i^2 (1-R_i^2) \right]}{\hat{\sigma}_i^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_i^2 + \sigma_i^2 (1-R_i^2)}, \quad (7.1.19)$$

$$\sigma_{Ni}^2 = \frac{\hat{\sigma}_i^2 \left[\sigma_{(N-1)i}^2 R_i^2 + \sigma_i^2 (1-R_i^2) \right]}{\hat{\sigma}_i^2 + \sigma_{(N-1)i}^2 R_i^2 + \sigma_i^2 (1-R_i^2)}. \quad (7.1.20)$$

Здесь σ_i^2 и R_i – параметры (дисперсия и коэффициент корреляции) переходной плотности вероятностей величин μ_{ci}, μ_{si} .

Начальные условия

$$m_{ci}^{(1)} = \frac{\hat{\mu}_{ci}^{(k)}}{s}, \quad \sigma_{1i}^2 = \hat{\sigma}_i^2,$$

$\frac{\hat{\mu}_{ci}^{(k)}}{s}$ определяются выражениями (7.1.12).

Из (7.1.19) и (7.1.20) следуют частные случаи.

1. В каналах с постоянными параметрами сигнала ($R_i = 1$)

$$m_{ci}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\mu}_{ci}^{(k)}}{s}, \quad \sigma_{Ni}^2 = \frac{\sigma_i^2}{N}. \quad (7.1.21)$$

По мере увеличения размера обучающей выборки параметры определяются все точнее.

2. В каналах с быстрыми изменениями параметров сигнала ($R_i \approx 0$)

$$m_{ci}^{(N)} = \frac{\hat{\mu}_{ci}^{(N)} \overline{h_i^2}}{1 + \overline{h_i^2}}, \quad \sigma_{Ni}^2 = \frac{\hat{\sigma}_i^2 \overline{h_i^2}}{1 + \overline{h_i^2}}, \quad (7.1.22)$$

где $\overline{h_i^2} = \frac{\sigma_i^2}{\hat{\sigma}_i^2} = \frac{2\sigma_i^2 E_i}{\nu^2}$ – среднестатистическое значение отношения энергии принятого сигнала в i -м луче к спектральной плотности шума.

При $\overline{h_i^2} \gg 1$ соотношения (7.1.22) примут вид

$$m_{ci}^{(N)} = \hat{\mu}_{ci}^{(N)}, \quad \sigma_{Ni}^2 = \hat{\sigma}_i^2, \quad (7.1.23)$$

что соответствует (7.1.21) при $N = 1$.

Из (7.1.22), (7.1.23) видно, что при быстрых изменениях параметров сигнала формирование оценок происходит независимо на каждом этапе наблюдения. В реальных каналах имеют место достаточно медленные изменения параметров сигнала ($R_i \approx 0,999$). Это обеспечивает возможность формирования оценок по правилу (7.1.21) для достижения высокой достоверности приема.

После подстановки в (7.1.3) выражений (7.1.8) и (7.1.18) с учетом (7.1.13) и интегрирования получим адаптивный алгоритм приема широкополосных сигналов в n -лучевом канале в общем виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[2 \left(m_{ci}^{(N)} X_{ri} + m_{si}^{(N)} Y_{ri} \right) - \left(m_{ci}^{(N)2} + m_{si}^{(N)2} \right) E_{ri} + \left(X_{ri}^2 + Y_{ri}^2 \right) \frac{\sigma_{Ni}^2}{\hat{\sigma}_i^2 E_{ri}} \right] > \\ & > \sum_{i=1}^n \left[2 \left(m_{ci}^{(N)} X_{li} + m_{si}^{(N)} Y_{li} \right) - \left(m_{ci}^{(N)2} + m_{si}^{(N)2} \right) E_{li} + \left(X_{li}^2 + Y_{li}^2 \right) \frac{\sigma_{Ni}^2}{\hat{\sigma}_i^2 E_{li}} \right], \quad r \neq l. \end{aligned} \quad (7.1.24)$$

Здесь

$$X_{ri} = \int_{NT + \Delta t_n}^{(N+1)T + \Delta t_n} z'(t) z_r(t - \Delta t_i) dt, \quad Y_{ri} = \int_{NT + \Delta t_n}^{(N+1)T + \Delta t_n} z'(t) \tilde{z}_r(t - \Delta t_i) dt. \quad (7.1.25)$$

При использовании сигналов с одинаковыми энергиями, правило приема (7.1.24) существенно упрощается

$$\sum_{i=1}^n \left(m_{ci}^{(N)} X_{ri} + m_{si}^{(N)} Y_{ri} \right) > \sum_{i=1}^n \left(m_{ci}^{(N)} X_{li} + m_{si}^{(N)} Y_{li} \right), \quad r \neq l, \quad (7.1.26)$$

где

$$m_{ci}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{ci}^{(k)}; \quad m_{si}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{si}^{(k)}. \quad (7.1.27)$$

Полученные решающие правила являются алгоритмами взаимно-корреляционного приема сигналов. Из (7.1.24)–(7.1.26) видно, что входной сигнал перемножается с опорным, задержанным на время запаздывания соответствующего луча, с последующим интегрированием результатов перемножения и сложением взвешенных сигналов.

В приемнике приема одного из M сигналов должно быть n корреляторов (согласованных фильтров) по числу обрабатываемых лучей. Для приема M сигналов число корреляторов в приемнике увеличивается до значения nM . Несколько антенн и приемных трактов позволяют реализовать прием по Q параллельным каналам, например, с разнесением в пространстве или по частоте, с соответствующим увеличением достоверности приема. Затем M подпотоков мультиплексируются в один большой поток данных.

7.2. Анализ помехоустойчивости приема широкополосных сигналов в многолучевых каналах

Проведем анализ помехоустойчивости приема сигнала (7.1.1) по алгоритму (7.1.26) с учетом мешающих факторов традиционной системы *CDMA*, т. е. при влиянии интерференционных помех. Из полученного выражения для вероятности ошибки помехоустойчивость системы *ZAZ-CDMA* будет вытекать как частный случай.

В рамках концепции *MIMO* возможны виды модуляции: однократная относительная фазовая (*BPSK*), квадратурная относительная фазовая (*QPSK*), квадратурная амплитудная (*m-QAM*) и их разновидности.

Вначале проанализируем помехоустойчивость приема двоичных противоположных сигналов ($z_2(t) = -z_1(t)$), т. е., сигналов с относительной фазовой манипуляцией. Для таких сигналов правило приема (7.1.26) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^n \left(m_{ci}^{(N)} X_{1i} + m_{si}^{(N)} Y_{1i} \right) > 0. \quad (7.2.1)$$

Здесь

$$X_{1i} = \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} z'(t) z_1(t - \Delta t_i) dt, \quad Y_{1i} = \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} z'(t) \tilde{z}_1(t - \Delta t_i) dt. \quad (7.2.2)$$

В неравенство (7.2.1) входят $m_{ci}^{(N)}$ и $m_{si}^{(N)}$ по формулам (7.1.27), в которых

$$\hat{\mu}_{ci}^{(k)} = \frac{1}{E_i} \int_{(k-1)T+\Delta t_n}^{kT+\Delta t_n} z'_k(t) z_1(t-\Delta t_i) dt, \quad (7.2.3)$$

$$\hat{\mu}_{si}^{(k)} = \frac{1}{E_i} \int_{(k-1)T+\Delta t_n}^{kT+\Delta t_n} z'_k(t) \tilde{z}_1(t-\Delta t_i) dt,$$

где

$$z'_k = \sum_{j=1}^{n'} \left\{ \left[\mu_{cj} z_1(t-\Delta t_j) + \mu_{sj} z_1(t-\Delta t_j) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{M-1} \left[\mu_{cjq} z_q(t-\Delta t_j) + \mu_{sjq} z_q(t-\Delta t_j) \right] \right\} + \xi(t). \quad (7.2.4)$$

В (7.2.4) n' – общее число лучей в многолучевом канале, воздействующих на вход приемника. Оно может отличаться от n в (7.2.1), где n – число используемых для обработки лучей.

В каналах с переменными случайными параметрами прием противоположных сигналов, как известно, можно реализовать системами с измерением параметров канала на предыдущем элементе или на N предыдущих элементах. Измерение параметров канала при $N > 1$ должно проводиться по классифицированной обучающей выборке, т. е., со снятием манипуляции, поэтому $m_{c1i}^{(N)} = m_{c2i}^{(N)} = m_{ci}^{(N)}$.

Вероятность ошибки найдем как вероятность невыполнения неравенства (7.2.1) при передаче первого варианта сигнала:

$$p = \int_{-\infty}^0 W(x) dx, \quad (7.2.5)$$

где

$$x = \sum_{i=1}^n \left(m_{ci}^{(N)} X_{1i} + m_{si}^{(N)} Y_{1i} \right) \quad (7.2.6)$$

– при передаче сигнала $z_1(t)$.

При независимых релеевских замираниях сигналов в лучах, при полном их разделении, левая часть неравенства (7.2.1) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Величины $m_{ci}^{(N)}$ и $m_{si}^{(N)}$, X_{1i} и Y_{1i} попарно независимы с матрицей ковариаций

$$K_i = \begin{bmatrix} \overline{m_{ci}^{(N)2}} & \overline{m_{ci}^{(N)} X_{li}} \\ \overline{m_{ci}^{(N)} X_{li}} & \overline{X_{li}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m_{si}^{(N)2}} & \overline{m_{si}^{(N)} Y_{li}} \\ \overline{m_{si}^{(N)} Y_{li}} & \overline{Y_{li}^2} \end{bmatrix}. \quad (7.2.7)$$

Плотность вероятности квадратичной формы (7.2.6) определяется известными соотношениями [4]:

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2\alpha_i} \exp\left(-\frac{x}{2\alpha_i}\right), \quad x > 0, \quad (7.2.8)$$

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{2\beta_i} \exp\left(-\frac{x}{2\beta_i}\right), \quad x < 0,$$

где

$$c_i = \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\beta_k}{\alpha_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right) \right]^{-1}, \quad (7.2.9)$$

$$d_i = \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_k}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(1 - \frac{\beta_k}{\beta_i}\right) \right]^{-1}.$$

Здесь $\alpha_i = \lambda_{1i}$; $\beta_i = -\lambda_{2i}$; λ_{1i} и λ_{2i} – собственные числа матрицы $[\mathbf{K}_i \mathbf{J}_i]$, где \mathbf{K}_i – матрица ковариаций (2.2.7), $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица квадратичной формы (7.2.6). Решая характеристическое уравнение $|\mathbf{K}_i \mathbf{J}_i - \lambda_i \mathbf{I}| = 0$, получим

$$\lambda_{1,2i} = \overline{m_{ci}^{(N)} X_{li}} \pm \sqrt{\overline{m_{ci}^{(N)2} X_{li}^2}}. \quad (7.2.10)$$

После подстановки (7.2.8) в (7.2.5) и соответствующих преобразований, вероятность ошибки будет определяться формулой:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^{2n-1}}{\prod_{k=1}^n (\beta_i + \alpha_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\beta_i - \beta_k)} \approx C_{2n-1}^n \prod_{i=1}^n p_i, \quad (7.2.11)$$

где $p_i = \beta_i / (\alpha_i + \beta_i)$.

Определим элементы матрицы ковариаций (7.2.7). Из (7.1.27) с учетом (7.2.3) и (7.2.4) следует

$$\begin{aligned}
m_{ci}^{(N)} &= \frac{1}{NE_i} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T+\Delta t_n}^{kT+\Delta t_n} z'_k(t) z_1(t - \Delta t_i) dt = \\
&= \frac{1}{NE_i} \int_{\Delta t_n}^{NT+\Delta t_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n'} \left[\mu_{cj} z_1(t - \Delta t_j) + \mu_{sj} \tilde{z}_1(t - \Delta t_j) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{q=1}^{M-1} \left[\mu_{cj} z_q(t - \Delta t_j) + \mu_{sj} \tilde{z}_q(t - \Delta t_j) \right] + \xi(t) \right] z_1(t - \Delta t_i) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{7.2.12}$$

В приемнике на каждом корреляторе или согласованном фильтре синхронизация сигнала осуществляется по одному из приходящих лучей ($i = j$). Он определяет максимальное значение главного лепестка автокорреляционной функции сигнала. Остальные лучи (их $(n' - 1)$) и помехи (их $(M - 1)$) оказывают мешающее влияние вследствие взаимодействия боковых лепестков взаимнокорреляционной функции сигнала ($i \neq j$) и помех. Поэтому после поперидного усреднения произведений быстроменяющихся функций под знаком интеграла в (7.2.12), при условии полного разделения лучей, получим

$$m_{ci}^{(N)} = \frac{1}{NT} \int_{\Delta t_n}^{NT+\Delta t_n} \mu_{ci}(t) dt + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\mu_{cj} \mu_{jq}}{\sqrt{B}} + \frac{1}{NE_i} \int_{\Delta t_n}^{NT+\Delta t_n} \xi(t) z_1(t - \Delta t_i) dt. \tag{7.2.13}$$

Здесь $B = FT$ – база сигнала (F – ширина полосы частот сигнала, T – длительность элемента сигнала). В (7.2.13) пренебрегли изменением μ_{cj} на интервале T у боковых лепестков корреляционной функции сигнала вследствие медленных изменений параметров канала.

Аналогично из (7.2.2) и (7.2.4) найдем

$$X_{li} = \frac{E_i}{T} \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} \mu_{ci}(t) dt + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\mu_{cj} \mu_{jq}}{\sqrt{B}} E_j + \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} \xi(t) z_1(t - \Delta t_i) dt. \tag{7.2.14}$$

Согласно (7.2.13) и (7.2.14) элементы ковариационной матрицы (7.2.7) в условиях полной разделимости лучей (пренебрегая слагаемыми вида $\mu_{ciq} \mu_{cjp}$) определяются как

$$\overline{m_{ci}^{(N)^2}} \approx \frac{\nu^2 E_i}{2} \left(\overline{h_i^2} r_{1i} + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + \frac{1}{N} \right), \quad (7.2.15)$$

$$\overline{X_{1i}^2} \approx \frac{\nu^2 E_i}{2} \left(\overline{h_i^2} r_{2i} + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + 1 \right), \quad (7.2.16)$$

$$\overline{m_{ci}^{(N)} X_{1i}} \approx \frac{\nu^2 E_i}{2} \overline{h_i^2} r_{3i}. \quad (7.2.17)$$

Здесь $\overline{h_i^2} = 2\sigma_i^2 \frac{E_i}{\nu^2} = \overline{\mu_{ci}^2} \frac{E_i}{\nu^2}$ – среднестатистическое значение отношения энергии принятого сигнала в i -м луче к спектральной плотности мощности шума;

$$\begin{aligned} r_{1i} &= \frac{1}{(NT)^2} \iint_{\Delta t_n}^{NT+\Delta t_n} R_i(t_1, t_2) dt_1 dt_2; \\ r_{2i} &= \frac{1}{T^2} \iint_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} R_i(t_1, t_2) dt_1 dt_2; \\ r_{3i} &= \frac{1}{NT^2} \int_{\Delta t_n}^{NT+\Delta t_n} \int_{NT+\Delta t_n}^{(N+1)T+\Delta t_n} R_i(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

где

$$R_i(t_1, t_2) = \frac{\overline{\mu_{ci}(t_1)\mu_{ci}(t_2)}}{\sigma_i^2} = \frac{\overline{\mu_{si}(t_1)\mu_{si}(t_2)}}{\sigma_i^2} \quad (7.2.19)$$

– корреляционная функция измеряемых параметров сигнала. Возможна экспоненциальная и гауссовская аппроксимации $R_i(t_1, t_2)$.

При экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции

$$R_i(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_k}\right) \approx 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{\tau_k}, \quad \Delta t_n \leq |t_1 - t_2| < NT + \Delta t_n \quad (7.2.20)$$

выражения (7.2.18) примут вид:

$$r_{1i} = 1 - \frac{NT}{3\tau_k}; \quad r_{2i} = 1 - \frac{T}{3\tau_k}; \quad r_{3i} = 1 - \frac{(N+1)T}{2\tau_k}.$$

Здесь τ_k – интервал корреляции изменений параметров сигнала.

В большинстве случаев на линиях связи корреляционная функция близка к гауссовской кривой:

$$R_i(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_k^2}\right) \approx 1 - \frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_k^2}. \quad (7.2.21)$$

При этом из (7.2.18) и (7.2.21) следует

$$r_{1i} = 1 - \frac{(NT)^2}{12\tau_k^2}; \quad r_{2i} = 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2}; \quad r_{3i} = 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2}(2N^2 + 3N + 2).$$

Гауссовская аппроксимация приводит к меньшим ошибкам, чем экспоненциальная.

Для определения собственных чисел матрицы $[\mathbf{K}_i \mathbf{J}_i]$ подставим (7.2.15)–(7.2.17) в (7.2.10) получим:

$$\lambda_{1,2i} \approx \frac{v^2 E_i}{2} \left(\overline{h_i^2} r_{3i} \pm \sqrt{\left(\overline{h_i^2} r_{1i} + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + \frac{1}{N} \right) \left(\overline{h_i^2} r_{2i} + \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + 1 \right)} \right). \quad (7.2.22)$$

После подстановки $\alpha_i = \lambda_{1i}$ и $\beta_i = -\lambda_{2i}$ из (7.2.22) в (7.2.11), получим выражение для вероятности ошибки

$$p \approx \frac{c_{2n-1}^n}{2^n} \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{\overline{h_i^2} r_{3i}}{\sqrt{\left(\overline{h_i^2} r_{1i} + \alpha \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + \frac{1}{N} \right) \left(\overline{h_i^2} r_{2i} + \alpha \sum_{j=1}^{n'-1} \sum_{q=1}^{M-1} \frac{\overline{h_{jq}^2}}{B} + 1 \right)}} \right]. \quad (7.2.23)$$

В (7.2.23) введен коэффициент α , учитывающий неидеальность корреляционных функций псевдослучайных последовательностей шумоподобных сигналов. При $\alpha = 1$ имеют место интерференционные помехи традиционной CDMA. При $\alpha = 0$ интерференционные помехи отсутствуют у сигналов с нулевой зоной корреляции, т. е. с зоной, свободной от интерференций (ZCZ-CDMA). Реально $0 \leq \alpha \leq 1$, поскольку теоретический предел $\alpha = 0$ не всегда достижим на практике.

Из (7.2.23) видно, что вероятность ошибки зависит от отношения энергии элемента сигнала к спектральной плотности мощности шума $\overline{h_i^2}$, от размера обучающей выборки N , от базы сигнала B , а также от коэффициентов, харак-

теризующих скорость изменения параметров сигнала r_{1i}, r_{2i}, r_{3i} и параметра α , характеризующего влияние интерференционных помех.

В качестве иллюстрации на рис. 7.2.1 приведены зависимости вероятности ошибки p от $\overline{h_i^2} = \overline{h_j^2} = \overline{h^2}$ (одинаковая интенсивность лучей) при разном числе обрабатываемых лучей $n = 1, 2, 3, 4$ при приеме на одну антенну, при обучении на одном интервале ($N = 1$). Сплошными линиями показаны зависимости, рассчитанные по формуле (7.2.23) для технологии ZCZ-CDMA ($\alpha = 0$) при гауссовской аппроксимации $R(t_1, t_2)$ при $T/\tau_k = 10^{-2}$, при демультиплексировании потока данных на четыре подпотока ($M = 4$), в условиях действия четырех лучей ($n' = 4$), при приеме сигналов с базой $B = 100$.

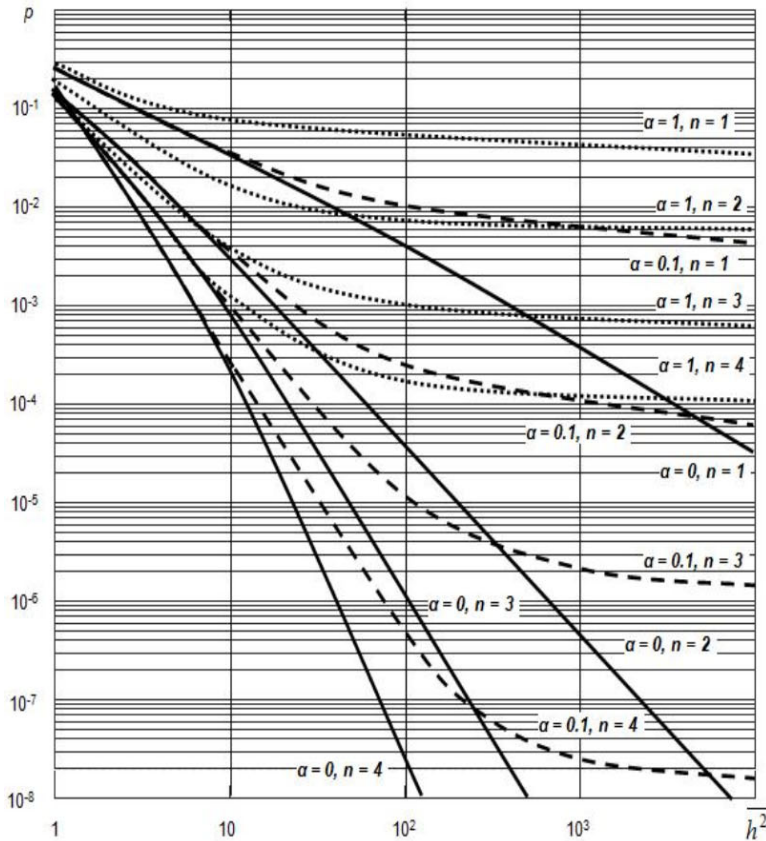


Рис. 7.2.1. Зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при разном числе обрабатываемых лучей при приеме на одну антенну.

Пунктиром показаны зависимости вероятности ошибки для традиционной технологии *CDMA* ($\alpha = 1$), т. е. с интерференционными помехами.

Штриховыми кривыми показаны зависимости вероятности ошибки при $\alpha = 0,1$, когда из-за ограниченности нулевой зоны корреляции интерференционные помехи оказывают частичное мешающее действие на сигнал, ухудшая помехоустойчивость приема, но в меньшей степени, чем при $\alpha = 1$.

Из приведенных зависимостей видно, что из-за влияния многолучевости и мешающих сигналов при $\alpha = 1$ уменьшение вероятности ошибки при увеличении $\overline{h^2}$ замедляется и при определенных значениях $\overline{h^2}$ перестает влиять на вероятность ошибки. При выделении одного луча это происходит при значениях $\overline{h^2}$, соизмеримых с базой сигнала. Использование нескольких лучей существенно повышает помехоустойчивость приема, но и в этом случае указанная закономерность наблюдается. Поэтому необходимо адаптивное регулирование излучаемой мощности передатчиков в ансамбле пользователей. Возможен также вариант построения многопользовательского демодулятора с алгоритмическим подавлением интерференционных помех.

Увеличение объема обучающей выборки N повышает помехоустойчивость приема при медленных изменениях параметров канала ($T/\tau_k < 10^{-3}$) для технологии *ZCZ-CDMA* ($\alpha = 0$), а при $\alpha = 1$ при значениях отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума $\overline{h_i^2}$ существенно меньших базы сигнала B , когда влияние интерференционных помех не сказывается. В пределе, при $N \gg 1$ выигрыш по вероятности ошибки равен 2^n , реально он меньше.

В каналах с относительно быстрыми изменениями параметров ($T/\tau_k > 10^{-2}$) увеличение объема обучающей выборки ($N > 1$) приводит к декорреляции сигнала и, следовательно, не дает уменьшения вероятности ошибки, а поэтому нецелесообразно.

Приведенные на рис. 7.2.1 кривые иллюстрируют помехоустойчивость приема при релеевских замираниях сигнала, из которых видно, что прием по трем замирающим лучам эквивалентен одиночному приему незамирающих сигналов при вероятности ошибки $p = 10^{-1} \dots 10^{-3}$. При вероятности ошибки $p = 10^{-4} \dots 10^{-5}$ такая эквивалентность будет при обработке четырех лучей.

Полученные зависимости являются верхней оценкой помехоустойчивости. В действительности при раздельном приеме лучей имеет место значительная регулярная (незамирающая) составляющая сигнала (замирания Релея-Райса), что существенно повышает достоверность приема.

Формулу (7.2.23) можно использовать и для оценки помехоустойчивости приема по параллельным каналам. В частности, при разнесенном приеме по частоте или в пространстве (на разнесенные антенны), в формулу (7.2.23) надо подставлять $n = L \cdot Q$, где L – число обрабатываемых лучей, Q – кратность разнесения. Для примера на рис. 7.2.2 приведены зависимости вероятности

ошибки от $\overline{h^2}$ при приеме на две разнесенные антенны ($Q = 2$) при обработке одного ($L = 1$), двух ($L = 2$) и трех ($L = 3$) лучей, рассчитанные по формуле (7.2.23) при тех же условиях, что и графики рис. 7.2.1.

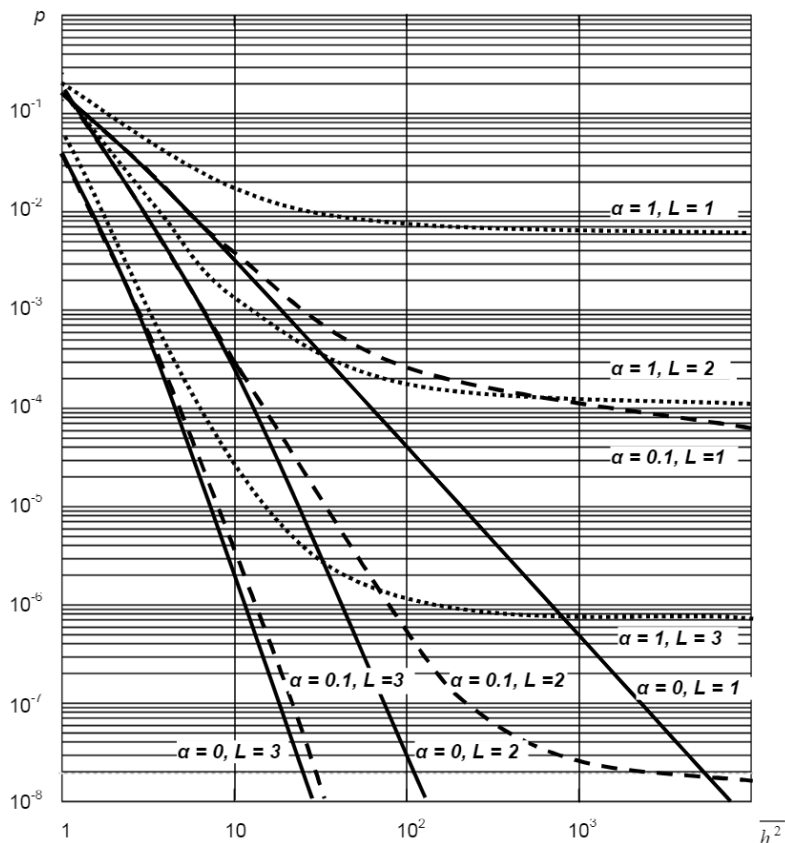


Рис. 7.2.2. Зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при разном числе обрабатываемых лучей при приеме на две разнесенные антенны

Из сравнения приведенных на рис. 7.2.1 и 7.2.2 зависимостей видно, что обработка одного луча при приеме на две разнесенные антенны обеспечивает такую же достоверность приема, как и обработка двух лучей при приеме на одну антенну, а обработка двух лучей при приеме на две антенны эквивалентна приему четырех лучей на одну антенну. Обработка трех лучей при приеме на две антенны эквивалентна шестикратному разнесенному приему.

Выше была рассмотрена двухпозиционная модуляция. В m -позиционной системе увеличение битовой скорости при заданной символьной скорости сопровождается эквивалентным энергетическим выигрышем в $\log_2 m$ раз. Одна-

ко следует иметь в виду, что увеличением $\overline{h^2}$ компенсировать проигрыш по вероятности ошибки возможно только при отсутствии интерференционных помех, т. е. при использовании *ZCZ-CDMA*.

После мультиплексирования всех M подпотоков данных в один поток, средняя вероятность ошибки остается такой же, как в каждом подпотоке, т.к. они обрабатываются в одинаковых условиях.

Применение шумоподобных сигналов с нулевой зоной корреляции (зоной, свободной от интерференционных помех) в сетях с кодовым разделением каналов по технологии *ZCZ-CDMA*, позволяет построить широкополосные скоростные, высокоэффективные, помехоустойчивые системы связи в рамках концепции *MIMO*. Такие системы могут занять свою нишу наряду с системами с *OFDM* (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) и пространственно-временным кодированием.

7.3. Адаптивный разнесенный прием сигналов OFDM

В системах WiMAX, Wi-Fi, LTE и др. повышение скорости передачи достигается не только увеличением позиционности модуляции передаваемых сигналов ($m > 2$), но и применением частотного уплотнения на основе технологии OFDM (OFDMA) [288–290]. Простое увеличение скорости передачи ограничено временем запаздывания лучей в многолучевых каналах. Для борьбы с межсимвольной интерференцией многолучевого распространения сигналов, скоростной поток данных разделяется на параллельные подпотоки, чтобы увеличить длительность передаваемых символов на каждой поднесущей. Кроме того, вводится циклический префикс, в зону которого попадает отраженный сигнал, приходящий с задержкой, и не накладывается на полезный сигнал. В таких системах ортогональная расстановка поднесущих частот в технологии OFDM требует когерентной обработки принимаемых сигналов для полного их разделения. Поэтому в каждом ресурсном блоке поднесущих частот добавляются специальные опорные (пилотные) и синхронизирующие сигналы. В частности, в сотовых системах LTE опорные сигналы передаются через каждые шесть поднесущих частот. Они служат для измерения (оценки) параметров канала. Их можно использовать для реализации квазикогерентной обработки сигналов (помимо оценки качества канала при диспетчеризации ресурсов). Здесь квазикогерентность означает, что измерение параметров сигнала (обучение) по опорным сигналам происходит с погрешностью вследствие воздействия помех и замираний. В каналах с медленными (по отношению к длительности OFDM – символа) общими замираниями на определенной группе частот, на интервале стационарности канала, возможно обеспечить достаточно хорошее качество приема. Что означает «достаточно хорошее» качество и при каких условиях оно хорошее, количественно оценим вероятностью ошибки приема сигналов.

Рассмотрим разнесенный прием, например, на разнесенные антенны. Будем полагать независимые замирания в разных ветвях разнесения.

Алгоритм приема. Принятая смесь сигнала с помехами в q -ой ($q=1,2,\dots,Q$) ветви разнесения на одной поднесущей имеет вид

$$z'_q(t) = \mu_{cq}z_r(t) + \mu_{sq}\tilde{z}_r(t) + \xi_q(t),$$

$$NT \leq t < (N+1)T. \quad (7.3.1)$$

Здесь Q – число ветвей разнесения; μ_{cq} и μ_{sq} – ортогональные составляющие коэффициентов передачи канала для сигнала $z_r(t)$; $\tilde{z}_r(t)$ и $\bar{z}_r(t)$ – функция, определяющая переданный сигнал на одной поднесущей и сопряженная ей по Гильберту; $\xi_q(t)$ – реализация флуктуационной помехи, аппроксимируемой белым гауссовским шумом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности ν^2 ; T – длительность OFDM символа; $r=1,2,\dots,m$ – алфавит сигнала.

Адаптивный алгоритм приема с обучением определяется отношением правдоподобия, в котором неизвестные априорные распределения параметров заменены апостериорными, сформированными при помощи обучающей выборки. В соответствии с критерием максимального правдоподобия для априорно равновероятных передаваемых сигналов адаптивный алгоритм определяется неравенством

$$\sum_{q=1}^Q \ln \Lambda_{rl}^{(q)} > 0, \quad r \neq l, \quad (7.3.2)$$

где

$$\Lambda_{rl}^{(q)} = \frac{\int W(\mu_{cq}, \mu_{sq} / u_q) \mathcal{F}(z'_q / z_r, \mu_{cq}, \mu_{sq}) d\mu_{cq} d\mu_{sq}}{\int_{G(\mu_{cq}, \mu_{sq})} W(\mu_{cq}, \mu_{sq} / u_q) \mathcal{F}(z'_q / z_l, \mu_{cq}, \mu_{sq}) d\mu_{cq} d\mu_{sq}} \quad (7.3.3)$$

– отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно l -го в q -ой ветви разнесения.

Здесь $W(\mu_{cq}, \mu_{sq} / u_q)$ – апостериорное распределение параметров сигнала, сформированное по обучающей выборке опорного сигнала; $G(\mu_{cq}, \mu_{sq})$ – область интегрирования, определяемая пределами изменения параметров сигнала;

$$\mathcal{F}(z'_q / z_r, \mu_{cq}, \mu_{sq}) = \frac{W(z'_q / z_r, \mu_{cq}, \mu_{sq})}{W(z'_q / 0)} \quad (7.3.4)$$

– функционал отношения правдоподобия принятой смеси сигнала с помехой при передаче сигнала $z_r(t)$ в q -ой ветви разнесения. В этом выражении

$$W(z'_q/z_r, \mu_{cq}, \mu_{sq}) = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{1}{\nu^2} \int_{NT}^{(N+1)T} \xi_q^2(t) dt \right], \quad (7.3.5)$$

где, согласно (7.3.1),

$$\xi_q(t) = z'_q(t) - [\mu_{cq} z_r(t) + \mu_{sq} \tilde{z}_r(t)]. \quad (7.3.6)$$

При медленных изменениях параметров сигнала μ_{cq} и μ_{sq} их можно измерять (оценивать) при помощи обучающей выборки опорного (пилотного) сигнала

$$s_{1q}(t), s_{2q}(t), \dots, s_{kq}(t), \dots, s_{Nq}(t), \quad (7.3.7)$$

где

$$s_{kq}(t) = \mu_{cq}^{(\text{оп})} u_q(t) + \mu_{sq}^{(\text{оп})} \tilde{u}_q(t) + \xi_q(t). \quad (7.3.8)$$

Здесь $\mu_{cq}^{(\text{оп})}$ и $\mu_{sq}^{(\text{оп})}$ – ортогональные составляющие коэффициентов передачи канала для опорных сигналов $u_q(t)$. При медленных общих замираниях группы поднесущих частот ресурсного блока, содержащего опорные сигналы, между μ_{cq} и $\mu_{cq}^{(\text{оп})}$ (μ_{sq} и $\mu_{sq}^{(\text{оп})}$) будет сильная корреляция. Например, в LTE опорные сигналы передаются через каждые шесть поднесущих частот, расположенных с интервалом 15 кГц, т. е. на расстоянии 90 кГц, а общие замирания в диапазонах функционирования систем WiMAX, Wi-Fi, LTE наблюдаются в полосе частот от нескольких сот килогерц до нескольких мегагерц.

Следуя процедуре, изложенной в параграфе 7.1 при выводе (7.1.18), получим апостериорное распределение параметров опорного сигнала в виде:

$$W(\mu_{cq}^{(\text{оп})}, \mu_{sq}^{(\text{оп})} / u_{1q}, \dots, u_{Nq}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Nq}^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{Nq}^2} \left[(\mu_{cq}^{(\text{оп})} - m_{cq}^{(N)})^2 + (\mu_{sq}^{(\text{оп})} - m_{sq}^{(N)})^2 \right] \right\} \quad (7.3.9)$$

Здесь при медленных замираниях

$$m_{cq}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{cq}^{(k)}; \quad m_{sq}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mu}_{sq}^{(k)}, \quad (7.3.10)$$

где

$$\hat{\mu}_{cq}^{(k)} = \frac{1}{E} \int_{(k-1)T}^{kT} s_q^{(k)}(t) u_q(t) dt; \quad \hat{\mu}_{sq}^{(k)} = \frac{1}{E} \int_{(k-1)T}^{kT} s_q^{(k)}(t) \tilde{u}_q(t) dt \quad (7.3.11)$$

– максимально правдоподобные оценки параметров канала на k -м этапе наблюдения опорных сигналов в q -ой ветви разнесения. На этапе синтеза алгоритмов полагаем $\mu_{cq} = \mu_{cq}^{(\text{оп})}$, $\mu_{sq} = \mu_{sq}^{(\text{оп})}$.

После подстановки в (7.3.3) выражений (7.3.4)–(7.3.6), (7.3.9) и соответствующих преобразований получим, согласно (7.3.2), адаптивный алгоритм разнесенного приема одной поднесущей ресурсного блока для сигналов с одинаковыми энергиями в виде:

$$\sum_{q=1}^Q \left(m_{cq}^{(N)} X_{rq} + m_{sq}^{(N)} Y_{rq} \right) > \sum_{q=1}^Q \left(m_{cq}^{(N)} X_{lq} + m_{sq}^{(N)} Y_{lq} \right),$$

$$r \neq l. \quad (7.3.12)$$

Здесь

$$X_{rq} = \int_{NT}^{(N+1)T} z_q'(t) z_r(t) dt; \quad Y_{rq} = \int_{NT}^{(N+1)T} z_q'(t) \tilde{z}_r(t) dt \quad (7.3.13)$$

– корреляционные интегралы, вычисленные на интервале $NT \dots (N+1)T$ после формирования оценок $m_{cq}^{(N)}$ и $m_{sq}^{(N)}$ по формулам (7.3.10), (7.3.11) на интервале $0 \dots NT$ при помощи обучающей выборки (7.3.7) специальных опорных сигналов. В (7.3.11), предполагая одинаковую энергию переданных информационных и опорных сигналов во всех ветвях разнесения, имеем

$$E = \int_T u_q^2(t) dt = \int_T \tilde{u}_q^2(t) dt = \int_T z_r^2(t) dt = \int_T \tilde{z}_r^2(t) dt.$$

Решающее правило (7.3.12) является алгоритмом квадратурной корреляционной обработки сигналов одной поднесущей ресурсного блока, в котором оценки параметров канала сформированы при помощи обучающей выборки опорных сигналов. Результаты обработки по алгоритму (7.3.12) мультиплексируются в один поток данных ресурсного блока.

Помехоустойчивость приема. Средняя вероятность ошибки в ресурсном блоке при приеме сигналов OFDM

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i,$$

где n – число поднесущих в ресурсном блоке; p_i – вероятность ошибки на одной поднесущей. В статистически однородных каналах $p(n) = p_i = p$.

Вероятность ошибки на одной поднесущей определяется вероятностью невыполнения неравенства (7.3.12) при передаче r -го сигнала. В системах с OFDM используется квадратурная амплитудно-фазовая модуляция m-QAM, где

$m = 2, 4, 16, 64$. Двухпозиционную (BPSK) и четырехпозиционную (QPSK) фазовые модуляции можно рассматривать как частный случай m -QAM с $m = 2$ и 4 . Наиболее просто вероятность ошибки вычисляется при $m = 2$, т. е. для BPSK и при этом наиболее наглядно возможно проанализировать основные особенности приема с использованием опорных (пилотных) сигналов, в частности, влияние скорости замираний сигналов на качество приема. Поэтому анализ помехоустойчивости приема проведем для данного вида модуляции ($m = 2$). Увеличение позиционности модуляции ($m > 2$) при заданной символьной скорости сопровождается увеличением битовой скорости в $\log_2 m$ раз ценой энергетического проигрыша в $\log_2 m$ раз.

Для сигналов с $m = 2$ (относительная фазовая модуляция при $z_2(t) = -z_1(t)$) алгоритм (7.3.12) преобразуется к виду

$$\sum_{q=1}^Q \left(m_{cq}^{(N)} X_{1q} + m_{sq}^{(N)} Y_{1q} \right) > 0. \quad (7.3.14)$$

Здесь согласно (7.3.13)

$$X_{1q} = \int_{NT}^{(N+1)T} z'_q(t) z_1(t) dt; \quad Y_{1q} = \int_{NT}^{(N+1)T} z'_q(t) \tilde{z}_1(t) dt \quad (7.3.15)$$

– корреляционные интегралы, вычисленные при передаче первого варианта сигнала. Оценки $m_{cq}^{(N)}$ и $m_{sq}^{(N)}$ вычисляются по формулам (7.3.10), (7.3.11). При этом следует иметь в виду, что в (7.3.10), (7.3.11) при $N > 1$ формирование оценок должно проводиться по классифицированной обучающей выборке, т. е. со снятием манипуляции. Заметим, что опорные сигналы $u_q(t)$ манипулированы по фазе (BPSK) псевдослучайными последовательностями Голда (вариант М–последовательности).

Вероятность ошибки найдем как вероятность невыполнения неравенства (7.3.14) при передаче первого варианта сигнала:

$$p = \int_{-\infty}^0 W(x) dx, \quad (7.3.16)$$

где

$$x = \sum_{q=1}^Q \left(m_{cq}^{(N)} X_{1q} + m_{sq}^{(N)} Y_{1q} \right) \quad (7.3.17)$$

– при передаче сигнала $z_1(t)$.

При независимых релейских замираниях сигналов в каждой ветви разнесения, левая часть неравенства (7.3.14) представляет собой квадратичную форму нормальных случайных величин с нулевым средним. Величины $m_{cq}^{(N)}$ и $m_{sq}^{(N)}$, X_{1q} и Y_{1q} попарно независимы с матрицей ковариаций

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} \overline{m_{cq}^{(N)2}} & \overline{m_{cq}^{(N)} X_{1q}} \\ \overline{m_{cq}^{(N)} X_{1q}} & \overline{X_{1q}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m_{sq}^{(N)2}} & \overline{m_{sq}^{(N)} Y_{1q}} \\ \overline{m_{sq}^{(N)} Y_{1q}} & \overline{Y_{1q}^2} \end{bmatrix}. \quad (7.3.18)$$

Плотность вероятности квадратичной формы (7.3.17) определяется известными соотношениями [4]

$$W(x) = \sum_{q=1}^Q \frac{c_q}{2\alpha_q} \exp\left(-\frac{x}{2\alpha_q}\right), \quad x > 0,$$

$$W(x) = \sum_{q=1}^Q \frac{d_q}{2\beta_q} \exp\left(\frac{x}{2\beta_q}\right), \quad x < 0, \quad (7.3.19)$$

где

$$c_q = \left[\prod_{k=1}^Q \left(1 + \frac{\beta_k}{\alpha_q}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q \left(1 - \frac{\alpha_k}{\alpha_q}\right) \right]^{-1},$$

$$d_q = \left[\prod_{k=1}^Q \left(1 + \frac{\alpha_k}{\beta_q}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q \left(1 - \frac{\beta_k}{\beta_q}\right) \right]^{-1}. \quad (7.3.20)$$

Здесь $\alpha_q = \lambda_{1q}$; $\beta_q = -\lambda_{2q}$; λ_{1q} и λ_{2q} – собственные числа матрицы $[\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q]$, где \mathbf{K}_q – матрица ковариаций (7.3.18), $\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица квадратичной формы (7.3.17). Решая характеристическое уравнение $|\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q - \lambda_q \mathbf{I}| = 0$, получим

$$\lambda_{1,2q} = \overline{m_{cq}^{(N)} X_{1q}} \pm \sqrt{\overline{m_{cq}^{(N)2} X_{1q}^2}}. \quad (7.3.21)$$

После подстановки (7.3.19) в (7.3.16) и соответствующих преобразований, вероятность ошибки будет определяться формулой:

$$p = \sum_{q=1}^Q \frac{\beta_q^{2Q-1}}{\prod_{k=1}^Q (\beta_q + \alpha_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^Q (\beta_q - \beta_k)} \approx C_{2Q-1}^Q \prod_{q=1}^Q p_q, \quad (7.3.22)$$

где $p_q = \beta_q / (\alpha_q + \beta_q)$.

Определим элементы матрицы ковариаций (7.3.18). Из (7.3.10), (7.3.11) с учетом (7.3.8) после поперидного усреднения произведений быстроменяющихся функций под знаком интеграла, следует

$$\begin{aligned} m_{cq}^{(N)} &= \frac{1}{NE} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} s_q^{(k)}(t) u_q(t) dt = \\ &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \mu_{cq}^{(\text{оп})}(t) dt + \frac{1}{NE} \int_0^{NT} \xi_q(t) u_q(t) dt. \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Аналогично из (7.3.15) и (7.3.1) получим

$$X_{1q} = \frac{E}{T} \int_{NT}^{(N+1)T} \mu_{cq}(t) dt + \int_{NT}^{(N+1)T} \xi_q(t) z_1(t) dt. \quad (7.3.24)$$

Согласно (7.3.23) и (7.3.24) элементы ковариационной матрицы (7.3.18) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \overline{m_{cq}^{(N)^2}} &= \frac{\nu^2 E}{2} \left(\overline{h_q^2} r_{1q} + \frac{1}{N} \right), \\ \overline{X_{1q}^2} &= \frac{\nu^2 E}{2} \left(\overline{h_q^2} r_{2q} + 1 \right), \\ \overline{m_{cq}^{(N)} X_{1q}} &= \frac{\nu^2 E}{2} \overline{h_q^2} r_{3q}. \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

Здесь $\overline{h_q^2} = 2\sigma_q^2 \frac{E}{\nu^2} = 2\overline{\mu_{sq}^2} \frac{E}{\nu^2}$ – среднестатистическое значение отношения

энергии принятого сигнала в q -ой ветви разнесения к спектральной плотности мощности шума;

$$\begin{aligned}
r_{1q} &= \frac{1}{(NT)^2} \iint_0^{NT} R_{1q}(t_1, t_2) dt_1 dt_2; \\
r_{2q} &= \frac{1}{T^2} \iint_{NT}^{(N+1)T} R_{2q}(t_1, t_2) dt_1 dt_2; \\
r_{3q} &= \frac{1}{NT^2} \int_0^{NT} \int_{NT}^{(N+1)T} R_{3q}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
\end{aligned} \tag{7.3.26}$$

В формулах (7.3.26)

$$R_{1q}(t_1, t_2) = \frac{\mu_{cq}^{(\text{оп})}(t_1)\mu_{cq}^{(\text{оп})}(t_2)}{\sigma_q^2} = \frac{\mu_{sq}^{(\text{оп})}(t_1)\mu_{sq}^{(\text{оп})}(t_2)}{\sigma_q^2}$$

– корреляционная функция ортогональных составляющих опорного сигнала в q -ой ветви разнесения;

$$R_{2q}(t_1, t_2) = \frac{\mu_{cq}(t_1)\mu_{cq}(t_2)}{\sigma_q^2} = \frac{\mu_{sq}(t_1)\mu_{sq}(t_2)}{\sigma_q^2}$$

– корреляционная функция ортогональных составляющих информационного сигнала;

$$R_{3q}(t_1, t_2) = \frac{\mu_{cq}^{(\text{оп})}(t_1)\mu_{cq}(t_2)}{\sigma_q^2} = \frac{\mu_{sq}^{(\text{оп})}(t_1)\mu_{sq}(t_2)}{\sigma_q^2}$$

– взаимная корреляционная функция ортогональных составляющих опорного и информационного сигналов. Возможна экспоненциальная и гауссовская аппроксимация $R_q(t_1, t_2)$.

При экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции

$$R_q(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{kq}}\right) \approx 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{\tau_{kq}}$$

выражения (7.3.26) примут вид:

$$r_{1q} = 1 - \frac{NT}{3\tau_{k1}}; \quad r_{2q} = 1 - \frac{T}{3\tau_{k2}}; \quad r_{3q} = 1 - \frac{(N+1)T}{2\tau_{k3}}.$$

Здесь τ_{ki} ($i=1,2,3$) интервал корреляции изменений параметров сигнала. В общем случае они могут быть разными для опорного и информационного сигналов. Но при общих замираниях группы поднесущих частот ресурсного блока, содержащего опорный сигнал $\tau_{k1} \approx \tau_{k2} \approx \tau_{k3} \approx \tau_k$. Например, при скорости движения абонента $v = 50$ км/час интервал корреляции замираний τ_k составляет величину порядка 10 мс (по данным работ [299, 300]). В сотовой сети LTE длительность OFDM-символа T вместе с префиксом составляет 71,4 мкс, тогда $T/\tau_k = 7,14 \cdot 10^{-3}$.

При гауссовской аппроксимации корреляционной функции

$$R_q(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_{kq}^2}\right) \approx 1 - \frac{(t_1 - t_2)^2}{2\tau_{kq}^2}$$

выражения (7.3.26) примут вид:

$$r_{1q} = 1 - \frac{(NT)^2}{12\tau_k^2}; \quad r_{2q} = 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2}; \quad r_{3q} = 1 - \frac{T^2}{12\tau_k^2}(2N^2 + 3N + 2).$$

Гауссовская аппроксимация более благоприятна для прогнозирования параметров канала. Многие авторы считают, что в большинстве случаев на линиях связи корреляционная функция близка к гауссовской кривой. Ее в дальнейшем и будем использовать при анализе. Определим собственные числа матрицы $[\mathbf{K}_q \mathbf{J}_q]$ подстановкой (7.3.25) в (7.3.21), получим

$$\lambda_{1,2q} = \frac{\nu^2 E}{2} \left(\overline{h_q^2} r_{3q} \pm \sqrt{\left(\overline{h_q^2} r_{1q} + \frac{1}{N} \right) \left(\overline{h_q^2} r_{2q} + 1 \right)} \right). \quad (7.3.27)$$

После подстановки $\alpha_q = \lambda_{1q}$ и $\beta_q = -\lambda_{2q}$ из (7.3.27) в (7.3.22) получим выражение для вероятности ошибки при разнесенном приеме OFDM сигналов

$$p \approx \frac{c_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left[1 - \frac{\overline{h_q^2} r_{3q}}{\sqrt{\left(\overline{h_q^2} r_{1q} + \frac{1}{N} \right) \left(\overline{h_q^2} r_{2q} + 1 \right)}} \right]. \quad (7.3.28)$$

Из (7.3.28) видно, что вероятность ошибки зависит от отношения энергии символа к спектральной плотности мощности шума $\overline{h_q^2}$, от размера обучающей

выборки N и от коэффициентов, характеризующих скорость изменения параметров сигнала r_{1q}, r_{2q}, r_{3q} .

На рис. 7.3.1 приведены зависимости вероятности ошибки P от размера обучающей выборки N при разных Q , вычисленные по формуле (7.3.28), в предположении $\overline{h_q^2} = \overline{h^2} = 10^2$ (одинаковая средняя интенсивность сигналов разных ветвей разнесения), при гауссовской аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$ при $T/\tau_k = 10^{-2}$ (сплошные линии) и при $T/\tau_k = 5 \cdot 10^{-2}$ (штриховые линии). Здесь же для сравнения приведены зависимости потенциальной помехоустойчивости при $r_{1q} \approx r_{2q} \approx r_{3q} \approx 1$ (штрихпунктирные линии), что практически соответствует значению $T/\tau_k \approx 10^{-3}$. Из приведенных зависимостей видно, что при $T/\tau_k = 10^{-2}$ заметное уменьшение вероятности ошибки происходит на первых двух–трех интервалах обучения, затем уменьшение вероятности ошибки замедляется, и при $N > 7$ вероятность ошибки будет возрастать вследствие декорреляции измеренных параметров сигнала. С увеличением N повышение помехоустойчивости приема происходит более эффективно при большом числе ветвей разнесения. В рассматриваемых условиях значение $T/\tau_k = 10^{-2}$ можно считать количественной оценкой (мерой) «медленности» замираний при гауссовской аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$. При $T/\tau_k = 5 \cdot 10^{-2}$ вероятность ошибки при $N = 2$ практически не уменьшается по сравнению с $N = 1$, а при $N > 2$ вероятность ошибки возрастает вследствие декорреляции измеренных параметров сигнала. Величина $T/\tau_k = 5 \cdot 10^{-2}$ близка к границе, характеризующей быстрые замирания, когда обучение на интервале $N > 1$ нецелесообразно. Монотонное уменьшение вероятности ошибки с увеличением N наблюдается только при $r_{1q} \approx r_{2q} \approx r_{3q} \approx 1$ (практически при $T/\tau_k \approx 10^{-3}$), однако и в этих условиях целесообразно осуществлять обучение на интервале не более двух–трех элементов обучающей выборки, т. к. далее уменьшение вероятности ошибок сильно замедляется.

Заметим, что в системах технологии LTE значение $T/\tau_k = 10^{-2}$ будет при скорости движения абонента $v \approx 70$ км/ч. Технологией LTE предусматривается мобильность до скорости $v = 350$ км/ч, при этом $T/\tau_k = 5 \cdot 10^{-2}$. Значение $T/\tau_k \approx 10^{-3}$ соответствует движению абонентской станции со скоростью пешехода.

Из выражения (7.3.28) видно, что в каналах с конечной скоростью изменения параметров сигнала при неограниченном увеличении величины $\overline{h_q^2}$ вероятность ошибки стремится не к нулю, а к предельному значению

$$P_{\text{пр}} \approx \frac{c_{2Q-1}^Q}{2^Q} \prod_{q=1}^Q \left[1 - \frac{r_{3q}}{\sqrt{r_{1q} r_{2q}}} \right].$$

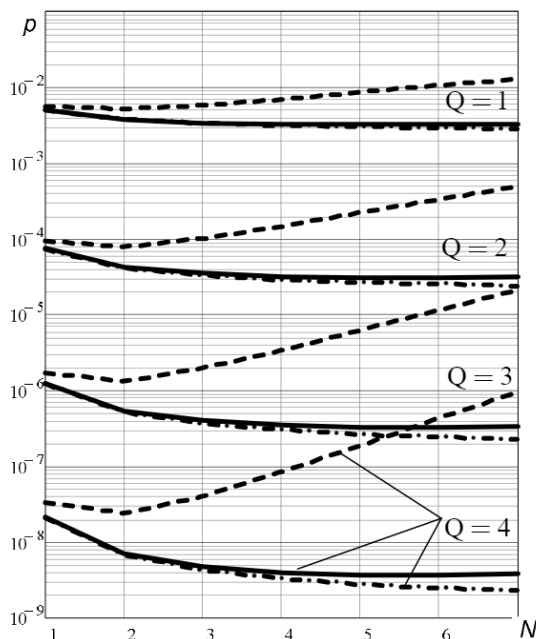


Рис. 7.3.1. Зависимости вероятности ошибки от размера обучающей выборки (гауссовская аппроксимация $R_q(t_1, t_2)$)

Например, при одиночном приеме ($Q = 1$) при $T/\tau_k = 10^{-2}$ предельная вероятность ошибки при экспоненциальной аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$ равна $P_{пр} = 3,4 \cdot 10^{-3}$, а при гауссовской аппроксимации $P_{пр} = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Предельная вероятность ошибки стремится к нулю только в каналах с неизменными параметрами ($r_{1q} = r_{2q} = r_{3q} = 1$). В таких каналах предельный выигрыш по вероятности ошибки при $N \gg 1$ по сравнению с $N = 1$ составляет 2^Q , реально он меньше.

На рис. 7.3.2 приведены зависимости вероятности ошибки p от $\overline{h_q^2} = \overline{h^2}$ при разных $Q = 1, 2, 3, 4$ при обучении на интервале $N = 1$ при гауссовской аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$ при $T/\tau_k = 10^{-2}$ (сплошные линии) и при $T/\tau_k = 5 \cdot 10^{-2}$ (штриховые линии). Штрихпунктирными линиями для сравнения показаны зависимости вероятности ошибки когерентного разнесенного приема (потенциальная помехоустойчивость) фазоманипулированных сигналов в каналах с релейевскими замираниями. Зависимости $p = f(\overline{h^2})$ между $N = 1$ и $N \gg 1$ пройдут на расстоянии $(1 + 1/N)Q$, что при $N = 2 \dots 3$ приводит к увеличению вероятности ошибки по сравнению с потенциальной помехоустойчивостью в $(1,3 \dots 1,5) Q$ раз.

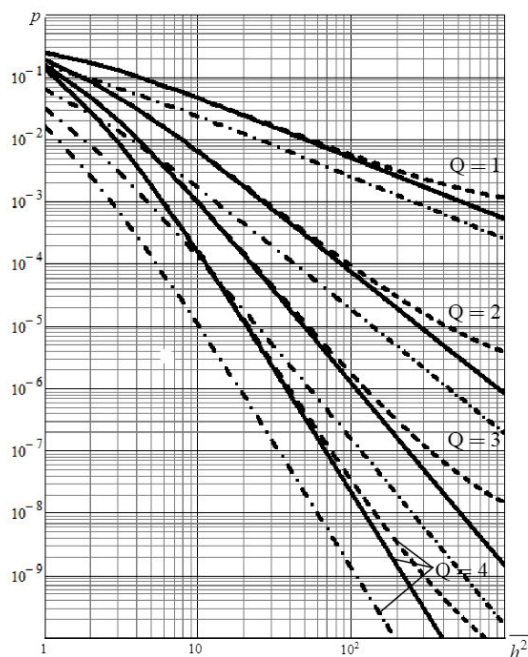


Рис. 7.3.2. Зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум (гауссовская аппроксимация $R_q(t_1, t_2)$)

Из рис. 7.3.2 видно замедление в уменьшении вероятности ошибки с увеличением $\overline{h^2}$ вследствие декорреляции параметров сигнала из-за конечной скорости замираний, однако адаптивный прием и в таких условиях обеспечивает высокую достоверность связи в системах с OFDM и даже при высокой скорости движения абонента (в LTE до $v = 350$ км/ч).

Таким образом, прием с обучением по опорным (пилотным) сигналам, в каналах с гауссовской корреляционной функцией замираний $R_q(t_1, t_2)$ незначительно проигрывает оптимальному приему при медленных (по сравнению с длительностью OFDM-символа) общих замираниях, которые наблюдаются в каналах функционирования систем WiMAX, Wi-Fi, LTE.

Для полноты картины на рис. 7.3.3 приведены зависимости вероятности ошибки p от $\overline{h^2}$ при разных $Q = 1, 2, 3, 4$ при обучении на интервале $N=1$ при экспоненциальной аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$, характерной для условий распространения сигналов в офисных помещениях [301]. Зависимости построены при $T/\tau_k = 10^{-2}$ (сплошные линии) и при $T/\tau_k = 10^{-3}$ (пунктир). Штрихпунктирными линиями показаны зависимости вероятности ошибки когерентного разнесенного приема (потенциальная помехоустойчивость). Из рис. 7.3.3 видно, что при

экспоненциальной аппроксимации $R_q(t_1, t_2)$, замедление в уменьшении вероятности ошибки при увеличении $\overline{h^2}$ происходит гораздо быстрее, чем при гауссовской аппроксимации, вследствие декорреляции измеренных параметров сигнала. Но и в таких каналах обучение по опорным (пилотным) сигналам целесообразно.

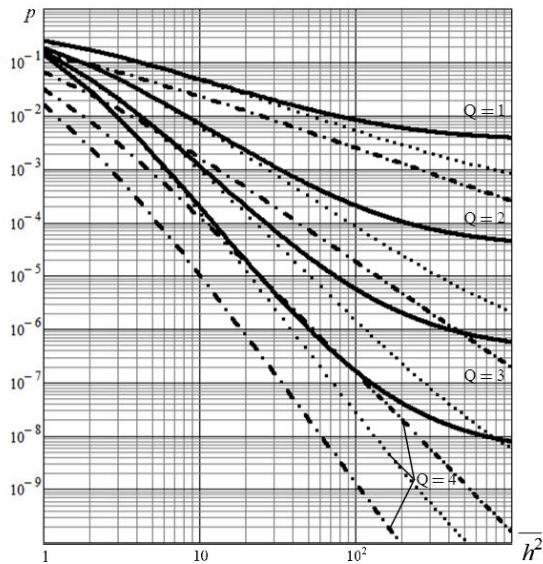


Рис. 7.3.3. Зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум (экспоненциальная аппроксимация $R_q(t_1, t_2)$)

По мере дальнейшего исследования свойств каналов в разных условиях (городской застройки, офисных помещений, при разных скоростях движения абонентов и т. д.) будут получены результаты, которые позволят более полно и точнее анализировать возможности реализации и функционирования рассматриваемых мобильных систем WiMAX, Wi-Fi, LTE.

В заключение отметим, что полученные зависимости вероятности ошибки являются верхней оценкой помехоустойчивости приема. В действительности принимаемый сигнал содержит регулярную (незамирающую) составляющую (затухания Релея-Райса), что значительно облегчает обучение и повышает достоверность приема рассматриваемых систем.

В настоящее время разработчики мобильных систем сделали выбор в пользу технологии OFDM, т. к. она показала лучшую спектральную эффективность (на данном этапе).

Литература

1. Агеев Д.В., Бабанов Ю.Н. Радиоприем амплитудно-модулированных сигналов при налагающихся частотных спектрах полезного и мешающих сигналов // Радиотехника и электроника. – 1964. – Т. IX. – № 7. – С. 1143–1148.
2. Альперт Я.Л. Распространение радиоволн и ионосфера. – М.: АН СССР, 1960. – 480 с.
3. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. – М.: Советское радио, 1971. – 416 с.
4. Андронов И.С., Финк Л.М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. – М.: Советское радио, 1971. – 406 с.
5. Андронов И.С. Помехоустойчивость приема в канале с селективными замираниями // Радиотехника. – 1968. – № 11. – С. 47–53.
6. Антонов О.Е. Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовских помехах. Обнаружение полностью известного сигнала // Радиотехника и электроника. – 1967. – Т. XII. – Вып. 5. – С. 579–586.
7. Антонов О.Е. Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовских помехах. Обнаружение сигналов с неизвестной амплитудой и фазой // Радиотехника и электроника. – 1967. – Т. XII. – Вып. 5. – С. 779–787.
8. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. Перевод с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1971.
9. Арзуманян Ю.В. Использование структурно-корреляционных модемов для борьбы с сосредоточенной по спектру помехой // Труды учебных институтов связи. – 1974. – № 64. – С. 65–73.
10. Бабанов Ю.Н. Методы радиоприема амплитудно-моделированных сигналов при налагающихся частотных спектрах полезного и мешающего сигналов // Радиотехника и электроника. – 1964. – Т. IX. – № 7. – С. 1149–1158.
11. Бабанов Ю.Н. Радиоприем при перекрывающихся частотных спектрах полезного и мешающего АМ сигналов и флюктуационных шумах // Электро-связь. – 1965. – № 2. – С. 1–8.
12. Баранчев В.В. Математическая модель совокупности аддитивного шума в каналах с сосредоточенными помехами // Труды учебных институтов связи. – 1974. – Вып. 68. – С. 174–176.
13. Баранчев В.В., Кловский Д.Д. Оптимальный прием дискретных сообщений в каналах с памятью. // Шестая конференция по теории кодирования и передачи информации. Доклады. Часть V. Системы передачи данных, М., Томск, 1975.
14. Баранчев В.В. Исследование оптимального приема дискретных сообщений в каналах с памятью : автореф. дисс. ... канд. техн. наук. – М.: МЭИС, 1975.

15. Баранов Ю.М., Гиришов В.С. Сравнение многоканальных систем передачи при сосредоточенных помехах // Радиотехника. – 1974. – № 7. – С. 1–6
16. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
17. Барк Л.С., Большев Л.Н., Кузнецов П.Т. Таблица распределения Релея–Райса. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1964. – 246 с.
18. Баронкин В.М., Левин Б.Р. Синтез асимптотически оптимальных алгоритмов обнаружения сигналов на фоне помех // Радиотехника и электроника. – 1974. – Т. 19. – № 5. – С. 1017–1040.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. – М.: Наука, 1969.
20. Белецкий А.Ф., Лебедев А.Т. Синтез согласованных фильтров на пассивных элементах // Электросвязь. – 1966. – № 3. – С. 3–10.
21. Белов В.А., Герастовский П.А. О помехоустойчивости одного вида адаптивных КВ-систем связи с обратным каналом // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1975. – Вып. 5.
22. Белов П.В., Кириллов Н.Е., Черкунов А.И. Помехоустойчивость пространственно-разнесенного приема при наличии замирающих помех // Радиотехника. – 1972. – Т. 27. – № I. – С. 77–79.
23. Бенджамин. Последние достижения в технике генерирования и обработки радиолокационных сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1965. – № 7. – С. 22–48.
24. Богданович В.А. Способ построения подобных правил обнаружения сигналов при априорной неопределенности // Радиотехника и электроника. – 1970. – № 7.
25. Бортников В.В., Романов А.В. Помехоустойчивость квазикогерентного разнесенного приема дискретных сообщений с самообучением по сигналам и сосредоточенным помехам // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т. 32. – № 5. – С. 986–994.
26. Брейтман И.М. Принципы построения адаптивных устройств последовательного самообучения // Труды учебных институтов связи. – 1972. – В. 58.
27. Брейтман И.М., Фалько А.И. К теории передачи сообщений по параллельным каналам при наличии сосредоточенных и флуктуационных помех // Радиотехника. – 1974. – Т. 29. – № 11. – С. 23–29.
28. Быховский М.А. Помехоустойчивость метода когерентного сложения сигналов в многолучевом канале при неполном разделении лучей // Проблемы передачи информации. – 1969. – № 4. – С. 47–55.
29. Быховский М.А. О помехоустойчивости широкополосной системы связи, работающей в загруженном диапазоне частот // Радиотехника и электроника. – 1967. – Т. 12. – № 9. – С. 1555–1565.

30. *Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. – М.: Советское радио, 1960. – 447 с.

31. *Вакман Д.Е.* Сложные сигналы и принцип неопределенности и радиолокации. – М.: Советское радио, 1960. – 304 с.

32. *Валеев В.Г.* Обнаружение некогерентной последовательности импульсов на фоне негауссовских помех // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16. – № 4.

33. *Валеев В.Г.* Оценка точности марковских моделей при синтезе и анализе систем обработки информации // Техническая кибернетика. – 1972. – № 5.

34. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения оценок и модуляции. – М.: Советское радио. Т.1, 1972. – 744 с. Т.2, 1975. – 344 с. Т.3, 1977. – 664 с.

35. *Ван Трис Г.* Приложения методов переменных состояний в теории обнаружения: Пер. с англ. // ТИИЭР. – 1970. – Т. 58. – № 5. – с. 55–72.

36. *Варакин Л.Е.* Теория сложных сигналов. – М.: Советское радио, 1970. – 374 с.

37. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. – М.: Иностранная литература, 1949. – 798 с.

38. *Витерби Э.Д.* Принципы когерентной связи. – М.: Советское радио, 1970. – 392 с.

39. *Витерби Э.Д., Омура Дж.К.* Принципы цифровой связи и кодирования. – М.: Радио и связь, 1982. – 536 с.

40. *Вовчук В.Е., Матвеев В.А., Сединин В.И., Фалько А.И.* Устройство разнесенного приема. Авторское свидетельство № 646449, кл Н 04 В 7/10. (Бюлл. изобр. № 5, 1979)

41. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Тартаковского Г.П. – Т.1. – М.: Советское радио, 1963. – 424 с.

42. *Всехсвятская И.С.* Статистические свойства сигналов, отраженных от ионосферы. – М.: Наука, 1973. – 136 с.

43. *Гаврилина В.Д.* Помехоустойчивость сигналов частотного телеграфирования для случая, когда замирания суммы сигнала и помехи подчиняются логарифмически-нормальному закону // Государственный НИИ. Сборник трудов. – 1964. – Вып. 3 (35).

44. *Герастовский П.А., Камнев Е.Ф., Самсонов Ю.Г.* Высокоскоростная адаптивная (с обратным каналом) КВ-система связи с измерением мгновенных значений сигнал/помеха // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1973. – Вып. 2.

45. *Герастовский П.А., Камнев Е.Ф.* Помехоустойчивость адаптивной одноканальной быстродействующей КВ-системы связи с обратным каналом // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1974. – Вып. 1.

46. Гольдберг А.П. Комплексное подавление сосредоточенных системных и преднамеренных помех // Специальная техника средств связи. Сер.: ТРС. – 1976. – Вып. 3.
47. Грандштейн И.С., Рыжик И.С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
48. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. – М.: Иностранная литература, 1961. – 167 с.
49. Гут Р.Э., Гиртюв В.С. Помехоустойчивость передачи дискретных сообщений при селективном частотном разнесении // Известия ВУЗов СССР – Радиоэлектроника. – 1977. – Т. 20. - № 9.
50. Гут Р.Э., Миневич М.Л. Расчет параметров дискретной модели канала связи с замираниями в многоканальной адаптивной системе связи с автовыбором // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1974. – Вып. 2.
51. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. – М.: Советское радио, 1972. – 448 с.
52. Давенпорт В.Б., Рут В.Д. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М.: Иностранная литература, 1960. – 468 с.
53. Добровидов А.В. Об одном алгоритме непараметрической оценки случайных многомерных сигналов // Автомеханика и телемеханика. – 1972. – № 2. – С. 88–99.
54. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. – М.: Связь, 1965. – 400 с.
55. Дуб Дж. Вероятностные процессы. – М.: Иностранная литература, 1953. – 605 с.
56. Дубро Э.Б. и др. Расчет распределений вероятностей амплитуд сигнала, сосредоточенных помех и их отношения в условиях релейских и логарифмически-нормальных замираний // Радиотехника и электроника. – 1969. – № 3. – С. 420–424.
57. Елизев В.Ф. и др. Среднее время использования экстремального канала в многоканальной системе // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т. 17. – № 1. – С. 69–73.
58. Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применения. – М.: Советское радио, 1972.
59. Заездный А.М., Окунев Ю.Б., Рахович Л.М. Фазоразностная модуляция. – М.: Связь, 1967. – 304 с.
60. Зуев В.Н., Иоценко А.Н., Савиных В.Л. Влияние ограничения спектра сигнала на помехоустойчивость широкополосной системы связи в условиях сосредоточенных помех – Л.: Труды учебных институтов связи. – 1974. – В. 68. – С. 135–141.

61. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. – М.: Связьиздат, 1972. – 360 с.

62. Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П. и др. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / Под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.

63. Иоценко А.И. Помехоустойчивость широкополосных систем связи при различных методах подавления сосредоточенных по спектру помех // Труды учебных институтов связи. – 1971. – В. 55. – С. 19–30.

64. Иванкин П.А., Лебединский Е.В. О приеме сигналов частотной телеграфии в условиях станционных помех // Радиотехника. – 1975. – Т. 30. – № 6.

65. Кайлат Т. Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки // ТИИЭР. – 1970. – Т. 58. – № 5. – С. 82–99.

66. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Труды американского общества инженеров механиков. Сер. Д.: Техническая механика. – 1961. – Т. 83. – № 1. – С. 123–141.

67. Камнев Е.Ф., Ломанов А.А. О помехоустойчивости низкоскоростных систем связи при работе в КВ-радиоканале в условиях релейских замираний, флуктуационных и станционных помех // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1972. – Вып. 2.

68. Камнев Е.Ф., Симица А.З., Ломанов А.А., Самсонов Ю.Г. Высокоскоростная адаптивная (с обратным каналом) КВ-система связи с измерением среднего отношения сигнал/помеха при использовании различных видов разнесенного приема // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1975. – Вып. 5.

69. Каплин Е.А., Калмыков В.В., Себекин Ю.Н. Некоторые статистические характеристики параметров загрузки коротковолнового диапазона помехами // Вопросы специальной радиоэлектроники. Сер.: ТРС. – 1969. – Вып. 1.

70. Каплин Е.А., Сикарев А.А. О помехоустойчивости некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением лучей в каналах с флуктуационными и сосредоточенными помехами // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: Техника радиосвязи. – 1972. – Вып. 7. – С. 25–42.

71. Каплин Е.А., Сикарев А.А., Цыганков В.В. Оптимальный некогерентный прием в каналах с сосредоточенными помехами // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: Техника радиосвязи. – 1974. – Вып. 6. – С. 25–35.

72. Кириллов Н.Е. Помехоустойчивость приема сигналов при наличии нелинейного подавителя помех // Вопросы радиоэлектроники. Сер. X: Техника радиосвязи. – 1966. – В. 3. – С. 3–14.

73. Кириллов Н.Е. Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно-изменяющимися параметрами. – М.: Связь, 1971. – 256 с.

74. Кириллов Н.Е., Михайлов В.С., Комаров В.Н., Разницын И.В. Исследование вопросов построения КВ радиoliniи с перестраиваемой в процессе сообщения рабочей частотой // Специальная техника средств связи. Сер.: ТРС. – 1976. – Вып. 2.

75. Киселев В.Ф. Некоторые вопросы построения схем связи самолетной радиосети с применением адаптивных коротковолновых р/линий // Специальная техника средств связи. Сер.: ТРС. – 1976. – Вып. 2.

76. Кловский Д.Д. Помехоустойчивость бинарных систем при флуктуационной и сосредоточенной помехах // Электросвязь. – 1965. – № 2. – С. 9–14.

77. Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. – М.: Связь, 1969. – 376 с.

78. Кловский Д.Д., Николаев Б.И. Инженерная реализация радиотехнических схем. – М.: Связь, 1975. – 200 с.

79. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

80. Колосов Г.Е. Некоторые задачи оптимальной фильтрации в отсутствие априорных статистических данных о свойствах сигнала и помехи // Радиотехника и электроника. – 1970. – Т. XV. – № 6. – С. 1157–1168.

81. Комарович В.Ф. Вероятность ошибки при разнесенном приеме в условиях случайных радиопомех // Радиотехника и электроника. – 1970. – Т. XV. – № II. – С. 2229–2233.

82. Комарович В.Ф. Оценка эффективности КВ радиoliniи, работающей на экстремальных частотах группы // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 5. – С. 55–63.

83. Комарович В.Ф. Вероятность ошибки при работе на экстремальных частотах группы в условиях высокой загрузки КВ диапазона // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 8. – С. 95–97.

84. Комарович В.Ф. Средняя вероятность ошибки при разнесенном приеме в условиях случайных радиопомех на экстремальных частотах группы // Радиотехника. – 1972. – Т. 27. – № 9. – С. 21–27.

85. Комарович В.Ф., Сосунов В.Н. Случайные радиопомехи и надежность КВ связи. – М.: Связь, 1977. – 135 с.

86. Коржик В.И., Финк Л.М. Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. – М.: Связь, 1975. – 271 с.

87. Кораблин М.А. Адаптивное обнаружение слабых повторяющихся сигналов // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. XVI. – № 8. – С. 1397–1400.

88. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 152 с.

89. *Котоусов А.С.* К определению корреляционных свойств сигналов дискретных сообщений на выходе канала связи со случайным изменением параметров // Проблемы передачи информации. – 1966. – Т. II. – Вып. I. – С. 82–90.
90. *Котоусов А.С.* Различие детерминированных сигналов в квазидетерминированном потоке импульсов // Проблемы передачи информации. – 1976. – Т. XII. – Вып. I. – С. 41–47.
91. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Иностранная литература, 1948. – 631 с.
92. *Кузнецов В.П.* Представление процессов в задачах приема сигналов // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 4. – С. 50–54.
93. *Кузнецов В.П.* Обнаружение слабых сигналов при негауссовских помехах // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 4. – С. 55–59.
94. *Кузьмин Б.И.* Оценка помехоустойчивости частотной телеграфии с «детектором качества» // Известия ВУЗов СССР – Радиоэлектроника. – 1976. – Т. XIX. – № II.
95. *Кук Ч., Бернфельд М.* Радиолокационные сигналы. – М.: Советское радио, 1971. – 568 с.
96. *Кушнир А.Ф.* Ранговые алгоритмы последетекторного обнаружения сигналов // Радиотехника. – 1971. – № 4. – С. 33–37.
97. *Кушнир А.Ф., Левин Б.Р.* Оптимальные ранговые алгоритмы обнаружения сигналов в шумах // Проблемы передачи информации. – 1968. – Т. 4. – Вып. 3. – С. 3–18.
98. *Левин Б.Р.* Актуальные проблемы статистического синтеза информационных систем // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 4. – С. 5–8.
99. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. – М.: Советское радио, 1974. – 552 с.
100. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга вторая. – М.: Советское радио, 1975. – 392 с.
101. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга третья. – М.: Советское радио, 1976. – 288 с.
102. *Лекции по теории систем связи / Под ред. Е.Дж. Багдади.* – М.: Мир, 1964. – 402 с.
103. *Литцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
104. *Лихарев В.А.* Цифровые методы и устройства в радиолокации. – М.: Советское радио, 1973. – 456 с.
105. *Мамаев Д.Д., Стратонович Р.Л.* Об оптимальном адаптивном оценивании априорно непостоянных параметров распределения // Известия ВУЗов – Радиофизика. – 1970. – Т. 13. – № 4. – С. 481–490.

106. *Матвеев В.А., Сикарев А.А., Фалько А.И.* Подавление сосредоточенных помех (обзор) // Известия ВУЗов СССР – Радиоэлектроника. – 1977. – Т. XX. – № 4. – С. 4–15.
107. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
108. *Мешковский К.А., Кириллов Н.Е.* Кодирование в технике связи. – М.: Связь, 1956. – 324 с.
109. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. Т. 1. – М.: Советское радио, 1961. – 782 с.
110. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. – М.: Советское радио, 1962. – 832 с.
111. *Миддлтон Д., Эспозито Р.* Новые результаты в теории одновременно оптимального обнаружения сигналов и оценки их параметров в шуме // Проблемы передачи информации. – 1970. – Т. VI. – Вып. 2. – С. 3–20.
112. *Нейман Дж.* Два прорыва в теории выбора статистических решений: Пер. с англ. – М.: Математика, 1964, 8:2. – С. 113–132.
113. *Немировский М.С.* Об одновременном детектировании сигнала, незатухающей помехи и флуктуационного шума экспоненциальным детектором // Электросвязь. – 1958. – № II. – С. 9–17.
114. *Нестерук В.Ф.* К теории приема сигналов при коррелированных помехах // Радиотехника. – 1962. – Т. 17. – № 6. – С. 19–23.
115. *Окунев Ю.Б., Яковлев Л.А.* Широкополосные системы связи с составными сигналами. – М.: Связь, 1968. – 168 с.
116. *Окунев Ю.Б.* Системы связи с инвариантными характеристиками помехоустойчивости – М.: Связь, 1973. – 80 с.
117. *Окунев Ю.Б.* Системы связи, инвариантные к помехам // Радиотехника. – 1971. Ч. 1. – № 6. – С. 1–7; Ч. 2. – № 9. – С. 1–6.
118. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. С.Я. Шаца. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
119. *Masry E.* Closed-form analytical results for the rejection of narrow-band interference in PN spread-spectrum systems. P. I: Linear prediction filters // IEEE Trans. – 1984. – Vol. COM-32. – № 8 – P. 888–896.
120. *Masry E.* Closed-form analytical results for the rejection of narrow-band interference in PN spread-spectrum systems. P. II: Linear prediction filters // IEEE Trans. – 1985. – Vol. COM-33. – № 1 – P. 10–19.
121. *Miller T.K., Alexander S.T., Faber L.J.* An SIMD multiprocessor ring architecture for the LMS adaptive algorithm // IEEE Trans. – 1986. – Vol. COM-34. – № 1. – P. 89–92.

122. *Meyer M.D., Agrawal D.P.* Adaptive lattice filter implementations on pipelined multiprocessor architectures // *IEEE Trans.* – 1990. – Vol. COM-38. – № 1 – P. 122–124.
123. *Милстайн Л.Б.* Методы подавления помех в системах радиосвязи с широкополосными сигналами // *ТИИЭР.* – 1988. – Т. 76. – № 6. – С. 19–36.
124. *Понкратов В.С., Антонов О.Е.* Об оптимальном приеме бинарных сигналов на фоне негауссовских помех // *Электросвязь.* – 1967. – № 9. – С. 25–33.
125. *Пелегов Ю.Ф.* К теории оптимального некогерентного приема многоканальных сообщений // *Радиоэлектроника в народном хозяйстве СССР. Материалы научно-технической конференции. Ч. II.* – Куйбышев, 1970. – С. 247–258.
126. *Петрович Н.Т.* Передача дискретной информации в каналах с фазовой манипуляцией. – М.: Советское радио, 1965. – 262 с.
127. *Петрович Н.Т., Размахин М.К.* Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Советское радио, 1969. – 232 с.
128. *Пугачев В.С.* Статистическая теория обучающихся автоматических систем // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* – 1967. – № 6. – С. 26–42.
129. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
130. *Ретин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. – М.: Советское радио, 1977. – 432 с.
131. *Роббинс Г.* Эмпирический байесовский подход к статистике: Пер. с англ. // *Математика*, 1964, 3:2. С. 133–140.
132. *Роббинс Г.* Эмпирический байесовский подход к задачам теории статистических решений: Пер. с англ. *Математика*, 1966, 10:5. С. 122–140.
133. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. – М.: Наука, 1971. – 286 с.
134. *Розенвассер Е.И., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1969. – 208 с.
135. *Сейдж Э.П., Мелс Дж.Л.* Идентификация систем управления: Пер. с англ. / Под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Наука, 1974.
136. *Семенов А.М., Сикарев А.А.* Широкополосная радиосвязь. – М.: Воениздат, 1970. – 278 с.
137. *Сифоров В.И., Туркельтауб Р.М.* Об одном методе статистического синтеза адаптивных систем обнаружения // *Радиотехника.* – 1974. – Т. 29. – № II. – С. 16–22.
138. *Сикарев А.А.* О методе исследования влияния помех в каналах передачи дискретной информации // *Радиотехника.* – 1968. – Т. 23. – № 8. – С. 83–90.

139. *Сикарев А.А.* О помехоустойчивости когерентного приема в условиях шумов и мешающих сигналов // *Радиотехника*. – 1970. – Т. 25. – № 8. – С. 22–28.
140. *Сикарев А.А.* Оптимальный некогерентный прием в каналах с флюктуационными и сосредоточенными помехами // *Проблемы передачи информации*. – 1970. – Т. VI. – Вып. 2. – С. 109–118.
141. *Сикарев А.А.* О помехоустойчивости оптимального некогерентного разнесенного приема в каналах с флюктуационными и сосредоточенными помехами // *Проблемы передачи информации*. – 1971. – Т. 7. – Вып. 4. – С. 97–101.
142. *Сикарев А.А.* Оптимальный разнесенный когерентный и некогерентный прием в каналах с флюктуационными и сосредоточенными помехами // *Проблемы передачи информации*. – 1973. – Т. IX. – Вып. 1. – С. 57–65.
143. *Сикарев А.А., Цыганков В.В.* Оптимальный прием в условиях флюктуационных и сосредоточенных помех на основе адаптивных многополосных согласованных фильтров // *Радиотехника*. – 1976. – Т. 31. – № 10. – С. 52–61.
144. *Сикарев А.А., Фалько А.И.* Оптимальный прием дискретных сообщений. – М.: Связь, 1978. – 328 с.
145. *Смолянинов В.М., Филиппов Л.И.* Помехоустойчивость некогерентного приемника // *Радиотехника и электроника*. – 1971. – Т. 16. – № 9. – С. 1652–1657.
146. *Снайдер Д.* Метод уравнений состояния для непрерывной оценки в применении к теории связи. – М.: Энергия, 1973. – 104 с.
147. *Сосулин Ю.Г.* Оценочно–корреляционный принцип прием сигналов на фоне помех и априорная информация // *Радиотехника и электроника*. – 1971. – Т. 16. – № 3. – С. 281–291.
148. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М.: Советское радио, 1978. – 320 с.
149. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В.* Оценочно-корреляционно-компенсационное обнаружение сигналов в дискретном времени // *Радиотехника и электроника*. – 2000. – Т. 45. – № 7. – С. 809–821.
150. *Стратонович Р.Л.* Применение теории марковских процессов для оптимальной фильтрации сигналов // *Радиотехника и электроника*. – 1960. – Т. 5. – № II. – С. 1751–1763.
151. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1961. – 558 с.
152. *Стратонович Р.Л., Сосулин Ю.Г.* Оптимальный прием сигналов на фоне негауссовской помехи // *Радиотехника и электроника*. – 1966. – Т. II. – № 4. – С. 579–591.
153. *Стратонович Р.Л.* Существует ли теория синтеза оптимальных адаптивных, самообучающихся и самонастраивающихся систем? // *Автоматика и телемеханика*. – 1968. – № I. – С. 96–107.

154. *Стратонович Р.Л.* Обнаружение и оценивание сигналов в шумах, когда оба или один из них – негауссовские // ТИИЭР. – 1970. – Т. 58. – № 5. – С. 73–82.
155. *Стратонович Р.Л.* Принципы адаптивного приема. – М.: Советское радио, 1973. – 140 с.
156. Таблицы вероятностных функций. Т. II / Под редакцией Л.С. Барк. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1970. – 344 с.
157. Таблицы распределения Релея–Райса. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1964.
158. *Тартаковский Г.П., Ретин В.Г.* Статистический синтез адаптивных систем // Радиотехника. – 1971. – Т. 26. – № 4. – С. 8–19.
159. Теория связи: Перевод с англ. / Под ред. Б.Р. Левина. – М.: Связь, 1972. – 392 с.
160. *Теплов Н.Л.* Помехоустойчивость системы передачи дискретной информации. – М.: Связь, 1964. – 360 с.
161. *Теплов Н.Л.* Анализ оптимальных схем приема дискретных сигналов на фоне сосредоточенных (по спектру или во времени) помех // Электросвязь. – 1968. – № 12. – С. 1–10.
162. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
163. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
164. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970.
165. *Фалько А.И.* Помехоустойчивость широкополосных систем связи при воздействии сосредоточенных помех // Труды учебных институтов связи. – 1967. – В. 36. – С. 16–26.
166. *Фалько А.И.* К вопросу подавления сосредоточенных помех в широкополосных системах связи // Электросвязь. – 1969. – № 7. – С. 9–14.
167. *Фалько А.И.* Об оптимальном приеме при воздействии небелого шума // Радиотехника. – 1970. – Т. 25. – № 8. – С. 29–33.
168. *Фалько А.И.* Об оптимальном приеме сигналов в перегруженных диапазонах волн // Пятая конференция по теории кодирования и передачи информации. Секция 3. – Москва–Горький, 1972. – С. 154–158.
169. *Фалько А.И.* Прием сигналов в условиях замирающих помех // Радиотехника. – 1972. – Т. 27. – № 7. – С. 82–84.
170. *Фалько А.И.* Разнесенный прием с обучением в каналах с сосредоточенными и флуктуационными помехами // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. XX. – № 10. – С. 2070–2079.

171. *Фалько А.И.* Помехоустойчивость адаптивных систем разнесенного приема с обучением в каналах с сосредоточенными помехами // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. XX. – № 11. – С. 2280–2285.

172. *Фалько А.И.* Вопросы построения оптимальных систем связи при действии сосредоточенных помех. Ч. I // Радиотехника. – 1975. – Т. 30. – № 9. – С. 12–19.

173. *Фалько А.И.* Вопросы построения оптимальных систем связи при действии сосредоточенных помех. Ч. 2 // Радиотехника. – 1975. – Т. 31. – № 10. – С. 3 – 10.

174. *Фалько А.И.* Адаптивный разнесенный прием при наличии стохастических сосредоточенных по спектру помех // Радиотехника и электроника. – 1976. – Т. XXI. – № 4. – С. 752–761.

175. *Фалько А.И.* Эмпирический байесовский подход к задачам различения сигналов в каналах с сосредоточенными помехами. // XXXI Всесоюзная научная сессия НТОРЭС им. А.С. Попова. Секция радиотехники. – Москва, 1976.

176. *Фалько А.И.* Помехоустойчивость когерентного и некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов // Радиотехника и электроника. – 1977. – Т. XXII. – № I. – С. 183–186.

177. *Фалько А.И.* Приложение методов динамической адаптации к задачам различения сигналов в каналах с сосредоточенными помехами // Известия ВУЗов СССР – Радиоэлектроника. – 1977. – Т. XX. – № 3. – С. 29–33.

178. *Фалько А.И.* Адаптивный разнесенный прием в каналах с сосредоточенными помехами // Радиотехника и электроника. – 1977. – Т. XXII. – № 4. – С. 729–735.

179. *Фалько А.И.* Адаптивный разнесенный прием в условиях действия сосредоточенных по спектру помех. Ч. I // Радиотехника. – 1977. – Т. 32. – № 6. – С. 10–15.

180. *Фалько А.И.* Адаптивный разнесенный прием в условиях действия сосредоточенных по спектру помех. Ч. 2 // Радиотехника. – 1977. – Т. 32. – № 9. – С. 16–21.

181. *Фалько А.И.* Разнесенный прием с самообучением в каналах с сосредоточенными по спектру помехами // Известия ВУЗов СССР – Радиоэлектроника. – 1977. – Т. XX. – № 8. – С. 40–44.

182. *Фалько А.И.* Вопросы обнаружения сигналов и измерения их параметров в каналах с сосредоточенными и флуктуационными помехами. // XXXII Всесоюзная научная сессия НТОРЭС им. А.С. Попова. Секция теории информации. Москва, 1977.

183. *Фалько А.И.* К теории адаптивного приема по параллельным каналам в условиях действия сосредоточенных помех // Радиотехника и электроника. – 1978. – Т. XXIII. – № 5. – С. 993–1000.

184. *Фалько А.И., Сединин В.И., Смирнов Н.Н.* Помехоустойчивость адаптивных систем разнесенного приема сигналов с пассивной паузой в каналах с сосредоточенными помехами // Вопросы радиоэлектроники. Серия общетехническая. – 1978. – Вып. 7.

185. *Фалько А.И., Балов А.В.* Прием сигналов в каналах с многолучевым распространением и сосредоточенными помехами // Вопросы радиоэлектроники. Серия общетехническая. – 1978. – Вып. 4.

186. *Фалько А.И., Сединин В.И.* Помехоустойчивость адаптивного разнесенного приема в каналах с сосредоточенными помехами // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24. – № 4. – С. 759–764.

187. *Фалько А.И., Сединин В.И., Смирнов Н.Н.* Вопросы обнаружения сигналов и оценки их параметров в каналах с сосредоточенными помехами // Вопросы радиоэлектроники. Серия общетехническая. – 1979. – Вып. 6. – С. 43–50.

188. *Фалько А.И., Шляхов И.М.* Прием многочастотных сигналов в условиях многолучевого распространения при воздействии сосредоточенных помех // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24. – № 7. – С. 1339–1350.

189. *Фалько А.И., Шляхов И.М.* Прием многочастотных сигналов с относительной фазовой манипуляцией в многолучевых каналах // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 9. – С. 1875–1880.

190. *Фалько А.И.* Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема с когерентным сложением сигналов в каналах с сосредоточенными помехами // Радиотехника и электроника. – 1982. – Т. 27. – № 4. – С. 746–751.

191. *Фалько А.И., Сединин В.И., Чухров А.С., Костюкович А.Е.* Помехоустойчивость некогерентного разнесенного приема в каналах с сосредоточенными помехами // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30. – № 6. – С. 1126–1130.

192. *Фалько А.И., Сединин В.И., Костюкович А.Е., Архипов С.Н.* Цифровая обработка сигналов в каналах с узкополосными помехами // Радиотехника. – 1998. – № 5. – С. 18–21.

193. *Фалько А.И., Мухин М.А.* Адаптивный прием сигналов в каналах с многолучевостью и узкополосными помехами // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 3–7.

194. *Фано Р.* Передача информации. Статистическая теория связи. – М.: Мир, 1965. – 438 с.

195. *Фалькович С.Е.* Оценка параметров сигнала. – М.: Советское радио, 1970. – 334 с.

196. *Фиговский Э.А.* Использование метода пространственной компенсации помех для адаптивного приема // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: ТПС. – 1975. – Вып. 2.

197. *Филитов Л.И.* Основы теории радиоприема дискретных сигналов. – М.: Наука, 1974. – 192 с.

198. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1970. – 728 с.
199. *Форни Г.Д.* Алгоритм Витерби // ТИИЭР. – 1973. – Т. 61. – № 3.
200. *Френкс Л.* Теория сигналов. – М.: Советское радио, 1974. – 344 с.
201. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин: Пер. с англ. / Под редакцией Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1971. – 255 с.
202. *Хайтман Е.Н.* Некоторые характеристики реального комплекса помех в КВ диапазоне // Электросвязь. – 1968. – № 2. – С. 43–48.
203. *Хворостенко Н.И.* Статистическая теория демодуляции дискретных сигналов. – М.: Связь, 1969. – 336 с.
204. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов. – М.: Иностранная литература, 1963. – 432 с.
205. *Хмельницкий Е.А.* Оценка реальной помехозащищенности приема сигналов в КВ диапазоне. – М.: Связь, 1975. – 232 с.
206. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
207. *Цыпкин Я.З.* Алгоритмы динамической адаптации // Автоматика и телемеханика, 1972. – № 1. – С. 68–77.
208. *Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т.* Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20. – № 4. – С. 734–745.
209. *Шахгильдян В.В., Лохвицкий М.С.* Методы адаптивного приема сигналов. – М.: Связь, 1974. – 158 с.
210. *Ширман Я.Л.* Разрешение и сжатие сигналов. – М.: Советское радио, 1974. – 360 с.
211. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / Под редакцией В.Б. Пестрякова. – М.: Советское радио, 1973. – 424 с.
212. *Шур А.А.* Характеристики сигнала на тропосферных радиолиниях. – М.: Связь, 1972. – 104 с.
213. *Ярлыков М.С.* Применение Марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1980. – 360 с.
214. *Daly R.F.* The Adaptive Binary – Detection Problem on the Real Line. Techn. Rep. N 2003 – 3, Stanford Electronics Laboratories, February, 1962.
215. *Kailath T.* A general likelihood-ratio formula for random signals in gaussian noise // IEEE Trans. – IT-15. – № 3. – 1969. – P. 350–361.
216. *Kailath T.* A further pote on general likelihood formula for random signals in gaussian noise // IEEE Trans. – IT-16. – № 3. – 1970. – P. 393–396.

217. Зинчук В.М., Лимарев А.Е., Сосулин Ю.Г., Мухин Н.П., Шестопалов В.И. Адаптивная цифровая фильтрация сигналов в радиотехнических системах // Теория и техника радиосвязи. – 1995. – Вып. 1. – С. 3–19.
218. Honig M.L., Messerschmitt D.G. Adaptive filters, structures, algorithms and application // Boston: Kluwer Academic Publishers, 1984. – 232 p.
219. Alexander S.T. Adaptive signal processing: theory and applications. – N.Y.: Springer-Verlag, 1986. – 179 p.
220. Haykin S. Adaptive filter theory. – Englewood Cliffs. – N.Y.: Prentice-Hall, 1986. – 590 p.
221. Treichler J.R., Jonson C.R., Larimore M.G. Theory and design of adaptive filters. – N.Y., 1982. – 342 p.
222. Адаптивные фильтры / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта: Пер. с англ. / Под ред. С.М. Ряковского. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
223. Уидроу Б., Стринз С. Адаптивная обработка сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
224. Proakis J.G. Digital communication. Third ed. – N.Y.: McGraw-Hill, 1995. – 917 p.
225. Hsu F.M., Giordano A.A. Digital whitening techniques for improving spread-spectrum communications performance in the presence of narrow-band jamming and interference // IEEE Trans. – 1978. – Vol. COM-26. – № 2. – P. 209–216.
226. Ketchum J.W., Proakis J.G. Adaptive algorithms for estimating and suppressing narrow-band interference in PN spread-spectrum systems // IEEE Trans. – 1982. – Vol. COM-30. – № 5. – P. 913–924.
227. Li Loh-Ming, Milstein L.B. Rejection of narrow-band interference in PN spread-spectrum systems using transversal filters // IEEE Trans. – 1982. – Vol. COM-30. – № 5. – P. 925–928.
228. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь. – 1985. – 384 с.
229. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
230. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
231. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.
232. Hodgkiss W., Presly J. Adaptive tracking of multiple sinusoids whose row-levels are widely separated // IEEE Trans. – 1981. – Vol. ASSP-29. – № 3, June. – P.710–721.
233. Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 8. – С. 54–94.

234. *Леховицкий Д.И., Табачников М.И., Шилицын С.И.* Выбор порядка линейного фильтра предсказания для стационарных случайных процессов с гауссовской корреляционной функцией // Радиотехника. – 1990. – № 4. – С. 44–48.
235. *Zerguine A., Cowan C.F., Bettayev M.* LMS-LMF adaptive scheme for echo cancellation // Electron Lett. – 1996. 32. – № 19. – P. 1776–1778.
236. *Lim Chao-Jen, Harris J.G.* Combined LMS/F algorithm // Electron Lett. – 1997. 33. – № 6. – P. 467–468.
237. *Воеводин В.В., Тартышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
238. *Levinson N.* The Weiner RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction // J.Math Phys. – 1947. – Vol. 25 (4), Jan. – P. 261–278.
239. *Durbin I.* Efficient estimation of parameters in moving average models // Biometrika. – 1959. – Vol. 46. – P. 306–316.
240. *Delsarte P., Genin Y.* The split Levinson algorithm // IEEE Trans. – 1986. – Vol. ASSP-34. – № 3, Jan. – P.470–478.
241. *Krishna H., Morgera S.D.* The Levinson recurrence and fast algorithms for solving toeplitz systems of linear equations // IEEE Trans. – 1987. – Vol. ASSP-35. – № 6. – P.839–848.
242. *Yagle A.E.* A new multichannel split Levinson algorithm for block hermitian-toeplitz matrices // IEEE Trans. – 1989. – Vol. CAS-36. – № 6, July. – P.928–931.
243. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
244. *Karni S., Zeng G.* A new convergence factor for adaptive filters // IEEE Trans. – 1989. – Vol. CAS-36. – № 7. – P.1011–1012.
245. *Clofffi J.M., Kailath T.* Fast, recursive-least-squares, transversal filters for adaptive filtering // IEEE Trans. – 1984. – Vol. ASSP-32. – № 4. – P. 304–321.
246. *Djigan V.I.* Unified approach to the fast time recursive least square adaptive filtering algorithms development // Сб. трудов III Международной научно-технической конференции «Антенно-фидерные устройства, системы и средства радиосвязи». – Воронеж. – 1997, май. – Т.1. – С. 33–41.
247. *Burg J.P.* Maximum entropy spectral analysis. Proceedings of the 37-th meeting of the society of exploration geophysicists. 1967.
248. *Хайкин С., Карри Б., Кеслер С.* Спектральный анализ радиолокационных мешающих отражений методом максимальной энтропии // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 51–62.
249. *Фейбер Л.Дж.* О рекуррентной форме представления знаменателя в алгоритме Берга // ТИИЭР. – 1986. – Т. 74. – № 7. – С. 167–169.

250. *Honig M.L., Messerschmitt D.G.* Convergence properties of an adaptive digital lattice filter // *IEEE Trans.* – 1981. – Vol. ASSP-29. – № 3, June. – P. 642–653.

251. *Theodoridis S., Kalouptsidis N., Proakis J., Koyas G.* Interference rejection in PN spread-spectrum systems with LS linear phase FIR filters // *IEEE Trans.* – 1989. – Vol. COM-37. – № 9. – P. 991–994.

252. *Kalouptsidis N., Theodoridis S.* Fast adaptive least square algorithms for power spectral estimation // *IEEE Trans.* – 1987. – Vol. ASSP-35, May. – P. 661–670.

253. *Суньву Д.С., Ун С.К.* Быстрый последовательный алгоритм построения КИХ-фильтров с линейной фазой по методу наименьших квадратов // *ТИИЭР.* – 1988. – Т. 76. – № 9. – С. 206–209.

254. *Bellegarda J.R., Farden D.S.* A new structure for adaptive linear-phase filtering // *IEEE Trans.* – 1987. – Vol. CAS-34. – № 7. – P. 712–721.

255. Кун С. Матричные процессоры на СБИС: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 672 с.

256. *Куньясья Л., Франц Дж.А., Саймар Р.* Цифровые процессоры обработки сигналов серии TMS 320 // *ТИИЭР.* – 1987. – Т. 75. – № 9. – С. 8–28.

257. *Хиллмен Г.Д.* Специализированный процессорный элемент цифровой обработки сигналов DSP 5620 // *ТИИЭР.* – 1987. – Т. 75. – № 9. – С. 52–60.

258. DSP/MSP Products reference manual. Analog Devices, Inc., 1995.

259. TMS 320C25 User's Guide. Houston, TX: Texas Instruments, Inc., 1986.

260. TMS 320C30 User's Guide. Houston, TX: Texas Instruments, Inc., 1987.

261. TMS 3205X User's Guide. Houston, TX: Texas Instruments, Inc., 1993.

262. *Wagner M.L., Current K.W.* Evaluation of real time adaptive noise canceling algorithms as implemented using a digital signal processor chip // *IEEE Proceeding-E Computers and Digital Techniques.* – 1990. – Vol. 137. – Pt. E. – № 2, March. – P. 144–150.

263. *Lawrence V.B., Tewkbury S.K.* Multiprocessor implementation of adaptive digital filters // *IEEE Trans.* – 1983. – Vol. COM-31. – № 6. – P. 826–835.

264. *Никонов В.В., Кравцов С.Г., Самошин В.Н.* Систематическая обработка информации: элементная база и алгоритмы // *Зарубежная радиоэлектроника.* – 1987. – № 7. – С. 34–51.

265. *Аксенов В.П., Красинский П.Я., Спиридонов Г.В.* Систематические алгоритмы и процессоры // *Зарубежная радиоэлектроника.* – 1987. – № 7. – С. 7–34.

266. *Костюнин А.Н.* Построение быстродействующих адаптивных цифровых фильтров на базе систематических структур // *Радиотехника.* – 1991. – № 3. – С. 23–36.

267. *Костюнин А.Н* Применение систолических процессоров для адаптивной фильтрации сигналов // Управляющие системы и машины. – 1991. – № 6. – С. 32–35.

268. *Konstantinides K., Kanopoulos N.* Design alternatives for adaptive digital lattice filters and a new bit-serial architecture // IEEE Trans. – 1987. – Vol. CAS-34. – № 7. – P. 737–742.

269. *Saulnier G.J., Das P.K., Milstein L.B.* An adaptive digital suppression filter for direct-sequence spread-spectrum communications // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1985. – Vol. SAC-3. – № 5. – P. 676–686.

270. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайтлата. – М.: Радио и связь, 1989. – 472 с.

271. *Уидроу Б.* и др. Стационарные и нестационарные характеристики обучения адаптивных фильтров, использующий критерий минимума СКО // ТИИ-ЭР. – 1976. – Т. 64. – № 8. – С.37–51.

272. *Константиновский А.Г., Белинский В.Т., Бочаров В.Б., Кудинов А.В.* Учет шумов квантования в адаптивном фильтре, использующем среднеквадратичную ошибку // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1982. – Т. 25. – № 1. – С. 31–37.

273. *Зинчук В.М., Лимарев А.Е.* Анализ шумов квантования при реализации адаптивных цифровых фильтров на базе микропроцессора TMS 32010 // Теория и техника радиосвязи. – 1993. – Вып. 2. – С. 43–57.

274. *Круповский-Синевиц К.Б., Бочаров В.Е.* Влияние обусловленности ковариационной матрицы на уровень шума адаптации // Вестник Киевского политехнического института: Радиотехника. – 1989. – Т. 26. – С. 50–52.

275. *Wang Y.C., Milstein L.B.* Rejection of multiple narrow-band interference in both BPSK and QPSK DS spread-spectrum systems // IEEE Trans. – 1988. – Vol. COM-36. – № 2. – P. 195–204.

276. *Зинчук В.М., Лимарев А.Е.* Анализ эффективности адаптивных цифровых фильтров при приеме шумоподобных сигналов на фоне узкополосных помех и белого гауссовского шума // Техника средств связи. Сер.: ТРС. – 1992. – Вып. 3. – С. 3–14.

277. *Bershad N.J.* Error probabilities for DS spread-spectrum systems using an ALE for narrow-band interference rejection // IEEE Trans. – 1988. – Vol. COM-36. – № 5. – P. 588–595.

278. *Proakis J.G.* Interference suppression in spread spectrum systems // Proceeding IEEE ISSSTA «96», September 22–25. – 1996. – Electoral Palace, Mainz, Germany. – 1996. – Vol. 1/3. – P. 259–266.

279. Masry E., Milstein L.B. Performance of DS spread-spectrum receiver employing interference-suppression filters under a worst-case jamming condition // IEEE Trans. – 1986. – Vol. COM-34. – № 1. – P. 13–21.

280. The Programmable Logic Data Book. – Xilinx, 1994.

281. Зинчук В.М., Сосулин Ю.Г., Лимарев А.Е., Мухин Н.П. Адаптивная цифровая фильтрация шумоподобных сигналов в радиотехнических системах // Цифровая обработка сигналов. – 2000. – № 1. – С. 5–18.

282. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д., Иванова В.Е., Мавиенко Н.И., Усов Д.Ю. Техническое обеспечение цифровой обработки сигналов. – СПб.: Наука и техника, 2000. – 592 с.

283. Солонина А.И., Умхович Д.А., Яковлев Л.А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2002. – 454 с.

284. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 603 с.

285. Частиков А.В. Разработка и исследование методов и устройств обнаружения и распознавания шумоподобных сигналов и защиты от узкополосных и подобных помех : автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. – М.: МТУСИ, 2001. – 38 с.

286. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./ Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

287. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. 2-е издание. Пер. с англ. – М.: Издательский Дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

288. Вишневский В.М., Портной С.Л., Шахнович И.В. Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G. – М.: Техносфера, 2009. – 472 с.

289. Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 591 с.

290. Вишневский В.М., Красилов А.Н., Шахнович И.В. Технология сотовой связи LTE– почти 4G // Электроника: Н.Т.Б. – 2009. – № 1. – С. 62–72.

291. Шинаков Ю.С. Новые возможности технологии синхронного кодового разделения каналов // Электросвязь. – 2006. – № 2. – С. 6–11.

292. Кренгель Е.И. Псевдослучайные двоичные последовательности с нулевой зоной автокорреляции и боковыми выбросами $\pm (p + 1)$ // Цифровая обработка сигналов. – 2004. – № 2. – С. 2–6.

293. Fan P., Darnell M. Sequence Design for Communication Applications. – Research Studies Press Ltd. London. 1996.

294. Li D. The Perspectives of Large Area Synchronous CDMA Technology for the Fourth-Generation Mobile Radio // IEEE Comm. Mag. – March 2003. – V. 41. – №3. – P. 114–118.

295. Крейнделин В. Б., Варукина Л.А. Квазиоптимальный алгоритм демодуляции в системах с пространственно-временным кодированием // Радиотехника. – 2009. – № 4. – С. 11–15.

296. *Hamid Jafarkhani*. Space-Time Coding: theory and practice // Cambridge University Press. 2005.

297. Шлома А.М., Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах связи / Под ред. проф. А.М. Шломы. – М.: Горячая линия–Телеком, 2008. – 344 с.

298. Гюнтер А.В. Применение кодов с нулевой зоной корреляции в системах с CDMA и OFDM // Телекоммуникации. – 2012. – №3. – С.8–12.

299. *Lee W.C.Y.* Mobile cellular telecommunications systems. McGraW Hill Co. NewYork, 1989.

300. *Mehrotra A.* Cellular radio performance engineering. Artech House. Boston-London, 1994.

301. *Awad M.K., Wong K.T.* An Integrated Overview of the Open Literature's Empirical Data on the Indoor Radiowave Channel's Delay Properties // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. Vol. 56, № 5, May 2008. P. 1451–1468.

302. Фалько А.И., Бондарев С.И. Адаптивный прием широкополосных сигналов в многолучевых каналах // Радиотехника. – 2001. – №8. – С.13–16.

303. Фалько А.И., Соболев В.В., Огородников А.Ю. Адаптивный прием широкополосных сигналов в многолучевых каналах // Телекоммуникации. – 2002. – №7. – С.5–12.

304. Фалько А.И., Огородников А.Ю., Мухин М.А. Помехоустойчивость адаптивного приема сигналов в многолучевых каналах // Радиотехника. – 2002. – №12. – С.36–39.

305. Фалько А.И., Мухин М.А. Адаптивный прием сигналов в каналах с многолучевостью и узкополосными помехами // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 3–7.

306. Фалько А.И., Шушинов М.С. Адаптивный прием сигналов в каналах со стохастическими узкополосными помехами // Телекоммуникации. – 2006. – № 6. – С.38–45.

307. Фалько А.И., Шушинов М.С. Прием широкополосных сигналов в каналах с многолучевым распространением и стохастическими узкополосными помехами // Радиотехника. – 2007. – № 2. – С.16–19.

308. Фалько А.И., Архипов С.Н. Прием сигналов с цифровым подавлением узкополосных помех // Телекоммуникации. – 2008. – №8. – С. 2–7.

309. *Falko A.I., Shushnov M.S.* Adaptive Reception of Signals in Channels with Stochastic Narrowband Interference // Telecommunications and Radio Engineering. – 2008. – № 10. – P. 925–944.

310. *Фалько А.И., Шушинов М.С., Гюнтер А.В.* Прием сигналов при воздействии коррелированных помех // Радиотехника. – 2009. – № 4. – С. 4–10.
311. *Фалько А.И., Шушинов М.С.* Теоретические основы приема сигналов по параллельным каналам при воздействии узкополосных помех. Часть 1. Синтез алгоритмов // Телекоммуникации. – 2009. – № 8. – С. 2–11.
312. *Фалько А.И., Шушинов М.С., Гюнтер А.В.* Теоретические основы приема сигналов по параллельным каналам при воздействии узкополосных помех. Часть 2. Анализ помехоустойчивости // Телекоммуникации. – 2010. – № 5. – С. 34–40.
313. *Фалько А.И., Носов В.И., Калачиков А.А.* и др. Применение шумоподобных сигналов с нулевой зоной корреляции в мобильных системах ММО // Телекоммуникации. – 2011. – №2. – С. 34–48.
314. *Фалько А.И., Омуралиева С.С.* Влияние нелинейности амплитудной характеристики тракта в системах с OFDM // Вестник СибГУТИ. – 2011. – № 1. – С. 3–16.
315. *Фалько А.И., Носов В.И., Калачиков А.А.* и др. Адаптивный разнесенный радиоприем сигналов OFDM // Радиотехника. – 2011. – № 11. – С. 13–19.
316. *Falko A.I., Arkhipov S.N.* Reception of Signals with Code Rejection of Narrowband Interference // Telecommunications and Radio Engineering. – 2011. – Т. 70 – № 8. – P. 673–684.
317. *Falko A.I., Shushnov M.S., Oshueva A.M., Yakimova M.G.* Theoretical Bases of Signal Reception via Parallel Channels Under the Conditions of Narrowband Interferences. Synthesis of Algorithms // Telecommunications and Radio Engineering. – 2012. – Т. 71 – № 4. – P. 293–314.
318. *Falko A.I., Nosov A.V., Kalachikov A.A.* Application of Noise – Like Signals with a Zero Correlation Area in MIMO Mobile Systems // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – Т. 72 – № 11. – P. 959–979.
319. *Фалько А.И.* Прием сигналов при воздействии маскирующих помех // Вестник СибГУТИ. – 2013. – № 3. – С. 11–19.
320. *Фалько А.И.* Прием сигналов при воздействии маскирующих помех. Часть 2 // Вестник СибГУТИ. – 2014. – № 1. – С. 57–63.
321. *Фалько А.И.* Прием сигналов в условиях действия маскирующих помех с неполной априорной информацией // Вестник СибГУТИ. – 2015. – № 1. – С. 72–81.